

Вопросы экзамена по алгебре

Группы 251, 253 (лектор Александр Лузгарев)

Четвертый семестр, весна 2016

Эвклидовы и унитарные пространства

1. Эвклидовы и унитарные пространства: определения и первые примеры.
2. Норма и угол.
3. Матрица Грама.
4. Поведение матрицы Грама при замене базиса, ее обратимость.
5. Ортогонализация Грама–Шмидта.
6. Ортогональные и унитарные матрицы, равносильные определения.
7. Ортонормированные базисы. Теорема Риса.
8. Ортогональное дополнение, его свойства.
9. Ортогональная проекция.
10. Сопряженное отображение: существование и единственность.
11. Свойства сопряжения. Матрица сопряженного отображения.
12. Самосопряженные операторы. Критерий равенства нулю самосопряженного оператора.
13. Нормальные операторы, их собственные числа и векторы.
14. Спектральная теорема для нормальных операторов в унитарном пространстве.
15. Спектральная теорема для самосопряженных операторов в эвклидовом пространстве.
16. Спектральная теорема для нормальных операторов в эвклидовом пространстве.
17. Самосопряженные, кососимметрические, унитарные операторы в унитарных и эвклидовых пространствах.
18. Изометрии.
19. Теорема Эйлера о вращениях, приведение квадратичной формы к диагональному виду, разложение пространства в ортогональную прямую сумму собственных подпространств.
20. Положительно определенные операторы.
21. Извлечение квадратного корня из положительно определенного оператора.
22. Полярное разложение.

Теория групп

23. Группы: определение, примеры.
24. Подгруппы: определение, примеры. Подгруппы аддитивной группы.
25. Подгруппа, порожденная множеством: две конструкции
26. Классы смежности, разбиение на классы и соответствующие отношения эквивалентности.
27. Нормальные подгруппы: определение и равносильные переформулировки.
28. Гомоморфизмы групп: определение, примеры.
29. Ядро и образ гомоморфизма.
30. Ядро и инъективность, изоморфизм и биективность.
31. Конструкция фактор-группы.
32. Теорема о гомоморфизме.
33. Циклические группы: определение и классификация. Порядок элемента.
34. Равномощность множеств левых и правых смежных классов. Теорема Лагранжа.

- 35. Следствия теоремы Лагранжа.
- 36. Прямое произведение групп
- 37. Критерий разложения группы в прямое произведение подгрупп.
- 38. Разложение перестановки в произведение независимых циклов.
- 39. Описание классов сопряженности в симметрической группе.
- 40. Теорема Кэли.
- 41. Диздральная группа.

Полилинейная алгебра

- 42. Тензорное произведение двух пространств.
- 43. Тензорное произведение нескольких пространств. Ассоциативность, коммутативность. Тензорный базис.
- 44. Двойственное пространство. Изоморфизм пространства с дважды двойственным.
- 45. Выражение Hom через \otimes .
- 46. Двойственность и \otimes .
- 47. Сопряженность \otimes и Hom .
- 48. Тензорное произведение линейных отображений. Его свойства, тензорное произведение Hom -пространств.
- 49. Кронекерово произведение матриц. Матрица тензорного произведения.
- 50. Тензорные пространства. Координаты тензора.
- 51. Преобразование координат тензора при замене базиса.