

# Вопросы экзамена по алгебре

Группы 151, 153 (лектор Александр Лузгарев)

Первый семестр, осень 2016

## Глава 3. Комплексные числа

1. Комплексные числа: определение, алгебраическая форма записи.
2. Комплексное сопряжение и модуль. Деление комплексных чисел.
3. Неравенство треугольника. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.
4. Перемножение комплексных чисел в тригонометрической форме. Формула Муавра.
5. Корни  $n$ -ой степени из комплексного числа. Свойства корней из единицы.
6. Первообразные корни из единицы, их количество.
7. Экспоненциальная форма записи комплексного числа и логарифм.

## Глава 4. Кольцо многочленов

8. Кольцо многочленов над кольцом.
9. Теорема о степени произведения многочленов над областью целостности и ее следствия.
10. Делимость в кольце многочленов. Теорема о делении с остатком.
11. Многочлен как функция. Лемма Безу.
12. Выделение линейных множителей и число различных корней многочлена над полем. Формальное и функциональное равенство многочленов.
13. Алгебраическая замкнутость. Разложение многочленов над полями комплексных и вещественных чисел.
14. Определение и свойства производной. Связь между корнями многочлена и его производной.
15. Характеристика поля. Поведение кратности корня при взятии производной над полем характеристики  $0$ .
16. Интерполяционная задача, единственность ее решения. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.
17. Наибольший общий делитель многочленов: существование и линейное представление.
18. Алгоритм Эвклида для многочленов. Оценка на степень коэффициентов в линейном представлении НОД.
19. Неприводимые многочлены. Основная теорема арифметики в кольце многочленов.
20. Конструкция поля частных области целостности: эквивалентность дробей, введение операций и проверка аксиом поля.
21. Поле рациональных функций. Правильные дроби, их свойства. Выделение многочлена из дроби.
22. Простейшие дроби: две леммы о разложении знаменателя.
23. Теорема о представлении правильной дроби в виде суммы простейших.
24. Простейшие дроби над полями комплексных и вещественных чисел. Нахождение коэффициентов в случае простых корней.

## Глава 5. Вычислительная линейная алгебра

25. Системы линейных уравнений и матрицы. Элементарные преобразования и связь с множеством решений.

26. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
27. Матрицы, свойства сложения и умножения.
28. Транспонирование и его свойства. Матричные единицы.
29. Матрицы элементарных преобразований. Элементарные преобразования строк и столбцов как умножения на матрицы.
30. Приведение матрицы к окаймленному единичному виду элементарными преобразованиями. Связь с обратимостью.
31. Блочные матрицы и операции над ними.
32. Группа перестановок. Табличная запись перестановки.
33. Разложение перестановки в произведение [элементарных] транспозиций.
34. Число инверсий и знак перестановки. Изменение знака при домножении на транспозицию.
35. Знак как число транспозиций в разложении. Мультипликативность знака.

#### Глава 6. Векторные пространства

36. Определение векторного пространства, простейшие свойства, примеры.
37. Подпространства: определение и примеры. Пересечение и сумма подпространств.
38. Прямая сумма подпространств. Критерии разложения пространства в прямую сумму подпространств.
39. Системы образующих и линейно независимые системы. Примеры.
40. Лемма о линейной зависимости. Следствие о добавлении вектора к линейно независимой системе.
41. Количество элементов в линейно независимой и порождающей системах.
42. Конечномерность подпространства конечномерного пространства.
43. Базис, определение и эквивалентная переформулировка. Любая система образующих содержит базис.
44. Любая линейно независимая система содержится в базисе. Дополнение пространства до прямой суммы.
45. Равномощность всех базисов. Размерность подпространства.
46. Теорема Грассмана о размерности суммы подпространств.
47. Если длина порождающей системы равна размерности, то это базис; то же для линейно независимой системы. Размерность прямой суммы подпространств. Критерий разложения в прямую сумму, использующий размерность.