

Мотивы Воеводского и арифметика линейных алгебраических групп *

Иван Панин

Виктор Петров

2012

1 Введение

1.1 Планы

Работа Панина и Пименова о квадратичных формах.

Простая формулировка. Пусть $K = \mathbb{C}(z_1, \dots, z_n)$ и $R := \{\frac{g(z)}{h(z)} \mid h(0) \neq 0\} \subset K$ — регулярные функции в окрестности 0. Пусть $u \in R^\times$. Рассмотрим уравнение

$$T_1^2 + \dots + T_k^2 = u.$$

(Предполагаем $k \geq 2$.) Если уравнение имеет решение в K , то оно имеет решение и в R .

Интересующая нас задача: классифицировать простые алгебраические группы над произвольным полем (или локальным регулярным кольцом). В каком смысле — мы объясним. Что такое простые алгебраические группы — это обсуждается в записках спецкурса.

Как все знают, над алгебраически замкнутыми полями классификацию простых алгебраических групп дают диаграммы Дынкина. Среди них — четыре бесконечные серии, которым соответствуют следующие присоединенные группы:

- A_n — PGL_{n+1} .
- B_n — SO_{2n+1} .
- C_n — PGSp_{2n} .
- D_n — SO_{2n} .

Исключительные группы: E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 .

Имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathrm{SL}_n \rightarrow \mathrm{PGL}_n \rightarrow 1.$$

«Теорема типа Спрингера»: пусть G и G' — группы типа G_2 над полем K . Пусть расширение $[L : K]$ нечетное. Тогда если $G_L \simeq G'_L$, то $G \simeq G'$.

С точностью до каких-то тонкостей, имеем

$$H^1(K, G_0^{ad}) \approx \{\text{присоед. простые алг. группы над } K \text{ того же типа, что и } G_0\}.$$

Это соответствие функториально в том смысле, что расширение полей L/K индуцирует морфизм $H^1(K, G^{ad}) \rightarrow H^1(L, G^{ad})$.

*Конспект лекций семинара весны 2012 года; предварительная версия. Автор Т_ЕX-версии — Александр Лузгарев. Основано на конспекте Алексея Бешенова первых двух лекций.

Наша высокая цель — построить функтор F , сопоставляющий полям абелевы группы с гомоморфизмом следа, так что конечное расширение $[L : K]$ давало бы морфизм $F(L) \rightarrow F(K)$ и естественное преобразование

$$H^1(K, G_0^{ad}) \rightarrow F(K).$$

Например, для $G_0 = \mathrm{PGL}_2 = \mathrm{Aut}(M_2)$ ответ такой:

$$F: K \rightsquigarrow K_2^M(K)/2,$$

где $K_2^M(K) = I^2(K)/I^3(K)$.

1.2 Теорема Меркурьева–Суслина и гипотеза Блоха–Като

Пусть A — центральная простая алгебра над полем K (более общее понятие — **алгебра Азумаи**, *Azumaya algebra*). Ей соответствует элемент $[A]$ в группе Брауэра $\mathrm{Br}(K)$.

- **Теорема Меркурьева** (1981) — изоморфизм ${}_2\mathrm{Br}(K) \simeq K_2^M/2$, а также следствие про $[A] \in {}_2\mathrm{Br}(K)$.
[\[http://www.mathunion.org/ICM/ICM1986.1/Main/icm1986.1.0389.0393.ocr.pdf\]](http://www.mathunion.org/ICM/ICM1986.1/Main/icm1986.1.0389.0393.ocr.pdf)
[\[http://www.math.ethz.ch/~knus/sridharan/merkurjev84.pdf\]](http://www.math.ethz.ch/~knus/sridharan/merkurjev84.pdf)
- **Теорема Меркурьева–Суслина** (1982) — изоморфизм ${}_p\mathrm{Br}(K) \simeq K_2^M/p$.
[L.H. Rowen, Ring theory, Vol. 2, §7.2]
- **Гипотеза Блоха–Като** («norm residue isomorphism theorem») — $K_n^M/p(-) \simeq H_{\mathrm{et}}^n(-, \mu_p^{\otimes n})$.
[\[http://arxiv.org/abs/0805.4430\]](http://arxiv.org/abs/0805.4430)

1.3 Кольцо Гротендика–Витта

$H^1(K, \mathrm{O}_n)$ — это классы изометрии невырожденных квадратичных форм ранга n .

Имеется функтор в кольцо Витта

$$H^1(K, \mathrm{O}_n) \rightarrow W(K), \quad f \mapsto [f].$$

Разберемся, что такое **кольцо Витта** $W(K)$. Его образующие — классы изометрии квадратичных форм над K , а соотношения выглядят так:

$$\begin{aligned} [f] + [g] &= [f \perp g], \\ [f] \cdot [g] &= [f \otimes g], \\ \mathbb{H} &= 0, \end{aligned}$$

где \mathbb{H} — класс изометрии двумерной квадратичной формы $f(x, y) = xy$, а $f \perp g$ имеет следующий смысл. Если f — квадратичная форма на V , а g — квадратичная форма на W , то на $V \oplus W$ задается квадратичная форма $(f \perp g)(u \oplus v) := f(u) + g(v)$.

Имеется корректно определенный гомоморфизм

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}: W(K) &\rightarrow \mathbb{Z}/2, \\ [f] &\mapsto \mathrm{rk} f \pmod{2}. \end{aligned}$$

$I := \ker \mathrm{rk}$ называется **фундаментальным идеалом**.

Кольцо Гротендика–Витта $GW(K)$ определяется следующим образом. В нем те же образующие, но нет условия $[xy] = 0$. Сначала определяется сложение и умножение, делающее $GW(K)$ полукольцом:

$$\begin{aligned} [f] + [g] &= [f \perp g], \\ [f] \cdot [g] &= [f \otimes g]. \end{aligned}$$

Потом мы берем группу Гротендика и получаем кольцо.

1.4 \mathbb{A}^1 -гомотопии и гипотеза Мореля

[<http://mathunion.org/ICM/ICM1998.1/Main/00/Voevodsky.MAN.ocr.pdf>]

\mathbb{A}^1 -гомотопическая категория пространств с отмеченными точками над K .

Сфера $S^0 = \{+, \bullet\}$ состоит из двух точек, из которых \bullet — отмеченная.

Теорема Мореля (1999?) состоит в вычислении

$$\pi_0^{stab}(S^0) \simeq \mathrm{GW}(K)$$

Fabien Morel, On The Motivic π_0 of the Sphere Spectrum.

http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-0948-5_7

Желаемый функтор F мог бы давать $H^1(K, G) \rightarrow H_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\mathrm{et}}G)$.

Аналог этого в топологии следующий. Пусть задано главное G -расслоение $\mathfrak{g} \rightarrow X$ для клеточного пространства X . Сопоставим ему отображение в классифицирующее пространство $X \xrightarrow{f_{\mathfrak{g}}} BG$.

Существует соответствие между множеством классов изоморфности главных G -расслоений над X и гомотопическими классами $[X, BG]$.

Имеется инъекция

$$[X, BG] = \pi_0(\mathrm{Map}(X, BG)) \hookrightarrow H_0(\mathrm{Map}(X, BG)).$$

Гипотеза Мореля заключается в том, что в алгебраической ситуации тоже получается инъекция

$$[\mathrm{Spec} K, B^{\mathrm{et}}G] = \pi_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\mathrm{et}}G) \hookrightarrow H_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\mathrm{et}}G).$$

1.5 Формы Пфистера

Рассмотрим фильтрацию на кольце Витта

$$W(K) \supset I \supset I^2 \supset I^3 \supset \dots$$

Теорема 1.5.1. $\bigcap_n I^n = \{0\}$.

Мы уже знаем, что $W(K)/I = \mathbb{Z}/2$. I/I^2 как абелева группа порождается элементами вида $\langle\langle a \rangle\rangle := x^2 - ay^2$ для некоторого $a \in K^\times$. Более общо, I^n/I^{n+1} порождается тензорными произведениями элементов

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle = \langle\langle a_1 \rangle\rangle \otimes \dots \otimes \langle\langle a_n \rangle\rangle.$$

$\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ называется n -кратной формой Пфистера.

Пример 1.5.2. При $n = 1$ имеем $a \in K^*/(K^*)^2$; $K(\sqrt{a})$ — квадратичное расширение.

При $n = 2$ символ $\langle\langle a, b \rangle\rangle$ есть норма алгебры кватернионов $H = (a, b)$ над K .

При $n = 3$ символ $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$ есть норма алгебры октонионов (a, b, c) над K (что соответствует группам типа G_2 над K).

Теорема 1.5.3 (Арасон). Если $[q] \in I^n$, то $\mathrm{rk} q \geq 2^n$. Если при этом $\mathrm{rk} q = 2^n$, то $q \simeq \alpha \cdot \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$, где $\alpha \in K^\times$. В частности, $\bigcap I^n = 0$.

- $e_0(q) := \mathrm{rk} q \pmod{2}$.
- Если $e_0 = 0$, то $[q] \in I$. Определим $e_1(q) := [q] \in I/I^2$. Этому соответствует $\langle\langle a \rangle\rangle$, где a — дискриминант q (с точностью до знака?).
- Если $e_1 = 0$, то $e_2(q) := [q] \in I^2/I^3$. Форме q можно сопоставить $C_0^+(q)$, четную положительную часть алгебры Клиффорда, это будет центральная простая алгебра. Имеем $[C_0^+(q)] \in {}_2\mathrm{Br}(K)$. По теореме Меркурьева, это сумма

$$[(a_1, b_1)] [(a_2, b_2)] \cdots [(a_k, b_k)]$$

$$\langle\langle a_1, b_1 \rangle\rangle + \langle\langle a_2, b_2 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle a_k, b_k \rangle\rangle.$$

- Если $e_2(q) = 0$, то можно определить $e_3(q)$ — инвариант Арасона.

1.6 Торсоры

Пусть G — простая алгебраическая группа над K .

G -**торсором** называется многообразие X над K , такое что

- определено действие $G \times X \rightarrow X$;
- над алгебраическим замыканием \bar{K} имеется изоморфизм $X_{\bar{K}} \simeq G_{\bar{K}}$ (как многообразий с G -действием).

Раньше торсоры назывались «главными однородными пространствами» (principal homogeneous space).

Пример 1.6.1. Действие G сдвигами на себе дает **тривиальный G -торсор**.

По определению, $H^1(K; G)$ есть множество классов изоморфности G -торсоров с отмеченной точкой (тривиальный G -торсор).

Пример 1.6.2. Зафиксируем $a \in K$. Для каждой K -алгебры R положим $\mu_2(R) = \{x \in R \mid x^2 = 1\}$, $X(R) := \{y \in R \mid y^2 = a\}$. Получаем схемы μ_2 и X , причем μ_2 действует на X умножением: если $y^2 = a$, $x^2 = 1$, то $(xy)^2 = a$.

X — тривиальный G -торсор iff у него есть рациональная точка: $X(K) \neq \emptyset$.

Если G — абелева группа, то на торсорах имеется сложение. При этом $H^1(K, \mu_2) \simeq K^*/(K^*)^2$ как абелева группа. И вообще $H^1(K, \mu_n) \simeq K^*/(K^*)^n$.

1.7 Скрученные формы

Напомним, что $O_{2n} = \text{Aut}(q_{\text{split}})$, где $q_{\text{split}} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ — **расщепимая форма** (от переменных $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$).

$H^1(K, O_{2n})$ можно отождествить с множеством классов изометрии невырожденных квадратичных форм ранга $2n$. Действительно, пусть q — квадратичная форма. Мы утверждаем, что $\text{Iso}(q_{\text{split}}, q)$ есть искомый торсор: на нем действует O_{2n} . Здесь $\text{Iso}(\varphi, \psi)$ обозначает функтор изоморфизмов между квадратичными формами φ и ψ ; более точно, $\text{Iso}(\varphi, \psi)(R) = \{f: \varphi_R \rightarrow \psi_R \mid f \text{ — изоморфизм}\}$. Над алгебраически замкнутым полем q изоморфна q_{split} , и получается $\text{Iso}(q_{\text{split}}, q_{\text{split}}) = \text{Aut}(q_{\text{split}}) = O_{2n}$.

Пусть A — некоторая алгебраическая структура над полем K (например, квадратичное пространство, конечномерная ассоциативная алгебра, конечномерная неассоциативная алгебра). Тогда **скрученная форма** A' для A есть такая структура над K , что при переходе к алгебраическому замыканию $A'_{\bar{K}} \simeq A_{\bar{K}}$.

Теорема. $H^1(K, \text{Aut}(A))$ есть множество классов изоморфности скрученных форм A над K .

Изоморфизм такой:

$$A' \xrightarrow{\sim} \text{Iso}(A, A').$$

На $\text{Iso}(A, A')$ есть структура алгебраического многообразия.

Замечание. Пусть X — проективное многообразие над K . Теорема (Гротендик): *функтор* $U \mapsto \text{Aut}_U(X \times U)$ *представим в схемах*; то есть, существует схема R такая, что $\text{Aut}_U(X \times U)$ естественно изоморфно $\text{Hom}(U, R)$.

Контрпример: $\text{Aut}(\mathbb{A}^n)$ не конечномерно.

Пример: $A := M_n(K)$. $\text{Aut}(A) = \text{PGL}_n$.

$H^1(K, M_n(K))$ — это скрученные формы $M_n(K)$, то есть центральные простые алгебры размерности n^2 , взятые с точностью до изоморфизма.

$\text{Aut}(\mathbb{P}^{n-1}) = \text{PGL}_n = \text{GL}_n / \mathbb{G}_m$.

Автоморфизмы сохраняют ранг.

$H^1(K, \text{PGL}_n)$ есть множество скрученных форм \mathbb{P}^{n-1} над K = **многообразия Севери–Брауэра**.

$$A \mapsto \text{SB}(A) = \{\text{левые идеалы } I \leq A \mid \dim_K(I) = n\}$$

Пример при $n = 2$: кватернионы $A = (a, b)$.
 $\beta u + \gamma v + \delta uv$. Имеем векторное пространство u, v, uv . Условие $\{\text{норма} = 0\}$ задает проективное подмногообразие в \mathbb{P}^2 .
 $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$ — коника.

$$\begin{aligned} \mathrm{PGL}_2 &\simeq \mathrm{SO}_3, \\ \{\text{кватернионы}\} &\simeq \{\text{формы ранга 3 с трив. дискриминантом}\}. \end{aligned}$$

1.8 Точные последовательности алгебраических групп

Точность последовательности алгебраических групп над K

$$1 \rightarrow C \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$$

означает следующее:

1. C — алгебраическая подгруппа в H .
2. После расширения скаляров $H(\overline{K}) \rightarrow G(\overline{K})$ является сюръекцией над алгебраическим замыканием поля K .
3. $C = \ker(H \rightarrow G)$, $C(R) = \ker(H(R) \rightarrow G(R))$.

Пример 1.8.1. Следующая последовательность алгебраических групп точна в указанном смысле:

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1,$$

где $\mathbb{G}_m(K) := \{(x, y) \in K^2 \mid xy = 1\}$, и отображение $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$ есть $x \mapsto x^2$ (это сюръекция над алгебраическим замыканием).

Пример 1.8.2. Следующая последовательность точна:

$$\mu_2(K) \rightarrow K^\times \rightarrow K^\times \rightarrow H^1(K, \mu_2) \rightarrow H^1(K, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(K, \mathbb{G}_m).$$

(Отображение $K^\times \rightarrow K^\times$ есть $x \mapsto x^2$.)

Теорема 1.8.3 (Теорема Гильберта 90).

$$H^1(K, \mathbb{G}_m) = \{\bullet\},$$

$$H^1(K, \mathrm{GL}_n) = \{\bullet\}.$$

Из точности последовательности выше и теоремы 90 получается

$$H^1(K, \mu_2) \simeq K^\times / (K^\times)^2.$$

Пример 1.8.4. Точная последовательность

$$1 \rightarrow \mathrm{SL}_n \rightarrow \mathrm{GL}_n \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m \rightarrow 1.$$

приводит к последовательности

$$\mathrm{GL}_n(K) \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m(K) \rightarrow H^1(K, \mathrm{SL}_n) \rightarrow H^1(K, \mathrm{GL}_n).$$

Здесь $H^1(K, \mathrm{SL}_n) = \{\bullet\}$ и $H^1(K, \mathrm{GL}_n) = \{\bullet\}$.

Пример 1.8.5.

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathrm{SL}_n \rightarrow \mathrm{PGL}_n \rightarrow 1.$$

$$\mu_n(K) \rightarrow \mathrm{SL}_n(K) \rightarrow \mathrm{PGL}_n(K) \rightarrow K^\times / (K^\times)^2 \rightarrow \{\bullet\} \rightarrow H^1(K, \mathrm{PGL}_n).$$

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathrm{PGL}_n \rightarrow 1.$$

Пример 1.8.6.

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_n &\rightarrow \mathrm{PGL}_n, \\ g &\mapsto (x \mapsto g x g^{-1}) \in \mathrm{Aut}(M_n). \end{aligned}$$

Это сюръекция алгебраических групп, но не сюръекция на точках.

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathrm{SL}_n \rightarrow \mathrm{PGL}_n \rightarrow 1.$$

Теорема 1.8.7. *Если имеется точная последовательность $1 \rightarrow C \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$, то возникает точная последовательность множеств с отмеченной точкой*

$$1 \rightarrow C(K) \rightarrow H(K) \rightarrow G(K) \rightarrow H^1(K, C) \rightarrow H^1(K, H) \rightarrow H^1(K, G).$$

См. книгу Серра «Когомологии Галуа».

1.9 Вторые когомологии

- Напомним, что $H^1(F, G)$ — множество G -торсоров. Если G коммутативна, то это аффинная алгебраическая группа.
(Как в этом случае умножаются торсоры? — Что-то типа $E_1 * E_2 = (E_1 \times E_2) / ((e_1, e_2) = (g e_1, g e_2))$.)
- $H^0(F, G)$ — это функтор $F \rightsquigarrow G(F)$, т.е. функтор точек. Если G коммутативна, то $H^i(F, G)$ можно определить как i -й производный функтор. При $i = 1$ это совпадает с первым определением.

Теорема 1.9.1. *Пусть имеется точная последовательность $1 \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$. Предположим, что $C \leq \mathrm{Cent}(G)$. Тогда точная последовательность продолжается до вторых когомологий:*

$$1 \rightarrow C(F) \rightarrow G(F) \rightarrow H(F) \rightarrow H^1(F, C) \rightarrow H^1(F, G) \rightarrow H^1(F, H) \rightarrow H^2(F, C).$$

Пример 1.9.2. $H^2(F, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(F)$ — группа Брауэра поля F : она состоит из классов эквивалентности $[A]$ центральных простых алгебр A над F ; умножение выглядит так: $[A] \cdot [B] = [A \otimes_F B]$.

Пусть X — квазипроективное многообразие. Тогда $H^2(X, \mathbb{G}_m)_{\mathrm{tors}} = \mathrm{Br}(X)$ (теорема Габбера (Gabber)). (Загадочное замечание: подразумевается топология fppf , а для этальной топологии в определении торсора вместо \bar{F} нужно взять F^{sep} .)

Пример 1.9.3 (Топологический аналог). Пусть X — хорошее топологическое пространство (например, область в \mathbb{R}^n , многообразие или CW-комплекс).

Пусть G — топологическая группа (например, S^1 , S^3 , $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$).

Имеется левое действие $G \times (G \times X) \rightarrow (G \times X)$, $g_1 \cdot (g_2, x) \mapsto (g_1 g_2, x)$.

Левое действие послойно и свободно на скрученной форме $G \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$.

Для всех $x \in X$ возникает действие $G \times \mathcal{G}(x) \rightarrow \mathcal{G}(x)$. Здесь $\mathcal{G}(x) \simeq G$, и этот изоморфизм зависит от x .

$(\mathcal{G}, G \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G})$ в топологии называется **главным G -расслоением (principal G -bundle)**.

$\mathcal{G}/G = X$.

Пример 1.9.4. $\mathbb{C}^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^1)$.

Пусть $L \rightarrow X$ — комплексное линейное расслоение, $z(X)$ — нулевое сечение.

Рассмотрим отображение $\mathbb{C}^\times \times (L - z(X)) \rightarrow (L - z(X))$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$. Имеем изоморфизм $L(x) - 0 \simeq \mathbb{C}^\times$, зависящий от x .

- Тогда $H^1(X, \mathbb{C}^\times)$ — классы изоморфизма \mathbb{C}^\times -торсоров над X . Они соответствуют линейным расслоениям над X : расслоению L соответствует описанный выше торсор $L - z(X)$, и по торсору \mathcal{G}^\times можно построить расслоение \mathcal{L} .
- Таким образом, мы видим, что $H^1(X, \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^1))$ — это скрученные формы расслоения $\mathbb{C} \times X$ над X .

- Аналогично, $H^1(X, \text{Aut}(\mathbb{C}^n))$ — это (1) скрученные формы расслоения $\mathbb{C}^n \times X$ над X , то есть (2) векторные расслоения над X со слоем \mathbb{C}^n (с точностью до изоморфизма).
- Пусть $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}, \sum u_i v_i)$ — автоморфизмы, сохраняющие квадратичную форму. Тогда

$$H^1(X, \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}, \sum u_i v_i))$$

— это (1) скрученные формы расслоений вида $(\mathbb{C}^n \times X, \sum u_i, v_i) \rightarrow X$, то есть (2) векторные расслоения $E \rightarrow X$ со слоем \mathbb{C}^n и с квадратичной формой в слоях.

- Рассмотрим $\text{Aut}(M_n(\mathbb{C})) = \text{PGL}_n(\mathbb{C})$. Тогда $H^1(X, \text{Aut}(M_n(\mathbb{C})))$ — это скрученные формы расслоений вида $M_n(\mathbb{C}) \times X \rightarrow X$. Например, по каждому расслоению $E \rightarrow X$ можно построить расслоение $\text{End}(E) \rightarrow X$, и послойно $\text{End}(E)(x) = \text{End}(E(x))$. Но бывают и расслоения, не изоморфные никакому $\text{End}(E) \rightarrow X$ — это нетривиальные топологические алгебры Адзумаи.

Имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^\times \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{PGL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow 1.$$

Отсюда получается точная последовательность

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \Gamma(X, \mathbb{C}^\times) \rightarrow \Gamma(X, \text{GL}_n(\mathbb{C})) \rightarrow \Gamma(X, \text{PGL}_n(\mathbb{C})) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}^\times) \rightarrow H^1(X, \text{GL}_n(\mathbb{C})) \rightarrow H^1(X, \text{PGL}_n(\mathbb{C})) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C}^\times). \end{aligned}$$

Топологическая группа Брауэра есть $\text{Br}_{\text{top}}(X) := H_{\text{top}}^2(X, \mathbb{C}^\times)$.

Пример 1.9.5. Мы утверждаем, что

$$H^2(X, S^1) \twoheadrightarrow H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}}.$$

Заметим, что $\mathbb{C}^\times \simeq S^1 \times \mathbb{R}$. Имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow S^1 \rightarrow 0,$$

откуда получаем точную последовательность

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^2(X, S^1) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X, \mathbb{R}) = H^3(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}.$$

Обозначим отображение $H^3(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ через α . Тогда связывающий гомоморфизм дает нам отображение $H^2(X, S^1) \rightarrow \ker(\alpha) = H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$.

На самом деле,

$$\text{Br}_{\text{top}}(X) = H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}}.$$

Нечто такое написано как определение (у Серра? Гротендика?).

А какие нам известны нетривиальные скрученные формы алгебры $M_n(K)$? Так это и есть центральные простые алгебры.

Имеем точную последовательность $1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \text{GL}_n \rightarrow \text{PGL}_n \rightarrow 1$, откуда

$$H^1(F, \text{GL}_n) \rightarrow H^1(F, \text{PGL}_n) \rightarrow H^2(F, \mathbb{G}_m).$$

При этом $H^1(F, \text{GL}_n) = \{\bullet\}$, и $H^1(F, \text{PGL}_n)$ — центральные простые алгебры степени n . Это отображение дает изоморфизм

$$\begin{aligned} \text{Br}(F) &\simeq H^2(F, \mathbb{G}_m), \\ A &\mapsto [A]. \end{aligned}$$

Имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1,$$

где $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$ — отображение $x \mapsto x^n$.

Получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(F, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^2(F, \mu_n) & \longrightarrow & H^2(F, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^2(F, \mathbb{G}_m), \\ \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\ \{\bullet\} & & & & \text{Br}(F) & \xrightarrow{\cdot n} & \text{Br}(F) \end{array}$$

откуда $H^2(F, \mu_n) = {}_n \text{Br}(F)$.

Еще один пример: пусть $\text{char } F \neq 2$. Имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \text{SO}_n \rightarrow \text{O}_n \xrightarrow{\det} \mu_2 \rightarrow 1.$$

Тогда

$$\text{O}_n(F) \twoheadrightarrow \mu_2(F) \rightarrow H^1(F, \text{SO}_n) \rightarrow H^1(F, \text{O}_n) \xrightarrow{\text{disc}} H^1(F, \mu_2) = F^*/(F^*)^2.$$

Отсюда $H^1(F, \text{SO}_n)$ (невырожденные квадратичные формы дискриминанта 1) — подмножество в $H^1(F, \text{O}_n)$ (невырожденные квадратичные формы ранга n с точностью до изометрии).

Это дает нам инвариант $\text{disc} = e_1: I \rightarrow I/I^2 \simeq F^*/(F^*)^2$.

Еще один пример:

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \text{Spin}_n \rightarrow \text{SO}_n \rightarrow 1.$$

$$\text{Spin}_n(F) \rightarrow \text{SO}_n(F) \xrightarrow{N} H^1(F, \mu_2) \xrightarrow{0} H^1(F, \text{Spin}_n) \rightarrow H^1(F, \text{SO}_n) \xrightarrow{e_2} H^2(F, \mu_2).$$

Здесь

- $H^2(F, \mu_2) = {}_2 \text{Br}(F)$.
- N — **спинорная норма**. А именно, каждый элемент SO_n раскладывается в произведение отражений $g = S_{v_1} \cdots S_{v_{2k}}$; тогда $N(g) := q(v_1) \cdots q(v_{2k}) \pmod{(F^\times)^2}$.
- Отображение $\text{Spin}_n(F) \rightarrow \text{SO}_n(F)$ уже не обязательно является сюръективным.
- Мы не знаем, что такое $H^1(F, \text{Spin}_n)$. Отображение $H^1(F, \mu_2) \rightarrow H^1(F, \text{Spin}_n)$ равно 0 по теореме Эйхлера.

Самая правая стрелка в этой длинной последовательности дает нам инвариант $e_2: I^2 \rightarrow I^2/I^3 = {}_2 \text{Br}(F)$. Его можно описать так: по форме q можно построить алгебру Клиффорда $C(q)$ с четной частью $C_0(q)$. Тогда e_2 сопоставляет форме $q \in I^2$ класс $[C_0^+(q)]$ в $\text{Br}(F)$.

Пусть E — левый G -торсор, G действует на X справа. Рассмотрим скрученную форму X

$${}_E X := (X \times E)/(x, e) \sim (x g^{-1}, g e).$$

На ней действует ${}_E G$. Действительно, $E_G = \text{Aut}_{G\text{-торс}}(E)$ — автоморфизмы E как G -торсора. ${}_E G$ является группой (тут G действует сопряжениями на себе).

Пример 1.9.6. Рассмотрим $H^1(F, \text{O}_n)$.

$E \in H^1(F, \text{O}_n)$ задается квадратичной формой q , и q должна быть формой расщепимой квадратичной формы q_0 . При этом $E = \text{Isom}(q_0, q)$.

$O(q_0)$ действует на квадрике $Q_0 := \{q_0 = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{2n-1}$.

После подкрутки: ${}_E Q_0 = \{q = 0\}$ и на ${}_E Q_0$ действует группа $O(q) = {}_E O(q_0)$.

1.10 Многообразие Севери–Брауэра

Пример 1.10.1. Рассмотрим $H^1(F, \mathrm{PGL}_n)$.

Торсор $E \in h^1(F, \mathrm{PGL}_n)$ задается центральной простой алгеброй A степени n : $E = \mathrm{Isom}_{F\text{-}\mathcal{A}lg}(M_n, A)$. Напомним, что $\mathrm{PGL}_n = \mathrm{Aut}(M_n)$.

Каждому вектору $v \in \mathbb{A}^n - \{0\}$ соответствует правый идеал $\{x \mid \mathrm{im} x \leq \langle v \rangle\}$ в M_n . Множество всех идеалов, получающихся таким образом — это в точности множество правых идеалов размерности n .

${}_E\mathbb{P}^{n-1}$ — Множество правых идеалов размерности n в A — **многообразие Севери–Брауэра** $\mathrm{SB}(A)$.

Уравнения:

$$\mathrm{SB}(A) := \{W \subset A \mid W \cdot A \subseteq A\}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{SB}(A) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(n, A) = \mathrm{Gr}(n, n^2).$$

$$\begin{array}{ccc} A \times \mathrm{SB}(A) & & A \times \mathrm{Gr}(n, n^2) \\ \uparrow \tau|_{\mathrm{SB}(A)} & & \uparrow \tau_n \\ \mathrm{SB}(A) & \hookrightarrow & \mathrm{Gr}(n, n^2) \end{array} \quad \begin{array}{c} W \\ \downarrow \\ \{w\} \end{array}$$

Лемма 1.10.2. $\mathrm{End}_{\mathrm{SB}(A)}(J_A) \simeq A$ (эндоморфизмы расслоения).

Поэтому два описания $H^1(F, \mathrm{PGL}_n)$ — как алгебры Адзумаи и как формы \mathbb{P}^{n-1} — эквивалентны.

Утверждение 1.10.3. Подрасслоение $\tau|_{\mathrm{SB}(A)}$ выдерживает правое A -действие на $A \times \mathrm{SB}(A)$.

$$J_A := \tau|_{\mathrm{SB}(A)}.$$

Пример 1.10.4. $\mathrm{Gr}(K, n)$ (линейные k -мерные подпространства в \mathbb{A}^n).

Если U — k -мерное подпространство в \mathbb{A}^n , то $\{x \mid \mathrm{im} x \subseteq U\}$ — правый идеал в M_n размерности kn .

$\mathrm{SB}_k(A)$ — обобщенное многообразие Севери–Брауэра — многообразие правых идеалов размерности k .

$\mathrm{Gr}(k, n) \simeq \mathrm{Gr}(n-k, n)$ (напомним, что это не канонический изоморфизм). Аналог этой двойственности: $\mathrm{SB}_k(A) \simeq \mathrm{SB}_{n-k}(A^{op})$.

Утверждение 1.10.5. $\mathrm{SB}(A)(F) \neq \emptyset \Rightarrow A \simeq M_n$.

$$\mathrm{SB}_k(A)(F) \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{ind} A \mid k.$$

(Напомним, что такое ind . Для центральной простой алгебры A имеем $A \simeq M_m(D)$, где D — тело. $m \cdot \deg D = n$. $\deg D =: \mathrm{ind} A$, где $\deg D := \sqrt{\dim D}$.)

Скрученные формы \mathbb{P}^{n-1} — это скрученные формы M_n . Имеем $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{n-1}) = \mathrm{PGL}_n$.

Предположим $\mathrm{char} F \neq 2$.

$$\mathrm{Aut}(q_0) = O(q_0).$$

$$\mathrm{Aut}(Q_0)^+ = \mathrm{PGO}(q_0), \text{ где } Q_0 \text{ — квадратика } \{q = 0\}.$$

$H^1(F, \mathrm{PGO}(q_0))$ — классы (A, σ) изоморфности центральных простых алгебр A с ортогональной инволюцией σ .

$$\{\text{правые идеалы } I \text{ в } (A, \sigma) \text{ размерности } \deg A \mid \sigma(I) \cdot I = 0\} =: X_{(A, \sigma)} \hookrightarrow \mathrm{SB}(A).$$

При поднятии до \bar{F} получаем:

$$Q_{\sigma(q_{\bar{F}})} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{F}}^{\deg A - 1} = \mathrm{SB}(A) \otimes_F \bar{F}.$$

Вложение $X_{(A, \sigma)} \hookrightarrow \mathrm{SB}(A)$ есть аналог вложения квадратика в проективное пространство.

2 Проективные однородные многообразия

2.1 Первые примеры

Еще раз про аналогию с топологией:

$E \rightarrow X$ — торсор на топологическом пространстве X , G действует на E . Существует покрытие $\{U_i\}$ пространства X такое, что

$$\begin{array}{ccc} U_i \times G \simeq E|_{U_i} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \\ U_i & \hookrightarrow & X \end{array}$$

У нас: возьмем $X = \operatorname{Spec} K$. Пусть $E \rightarrow \operatorname{Spec} K$ — торсор. Существует расширение полей L/K такое, что торсор $E_L \rightarrow \operatorname{Spec} L$ изоморфен торсору $G_L \rightarrow \operatorname{Spec} L$.

Мы хотим описать $H^1(K, G)$. Стратегия: для торсора E и (гладкого проективного) G -многообразия X мы определили ${}_E X$ — ${}_E G$ -многообразие (снова гладкое проективное), которое называется *скрученной формой* X , то есть,

- $E_{\overline{K}} \simeq G_{\overline{K}}$ как $G_{\overline{K}}$ -многообразие,
- $({}_E G)_{\overline{K}} \simeq G_{\overline{K}}$ как алгебраическая группа,
- $({}_E X)_{\overline{K}} \simeq X_{\overline{K}}$ как $G_{\overline{K}}$ -многообразие.

Пример 2.1.1. Пусть $A \in H^1(K, \operatorname{PGL}_n)$; то есть, A — центральная простая алгебра степени n . Положим $E = \operatorname{Isom}(M_n, A)$, $X = \mathbb{P}^{n-1}$, $G = \operatorname{PGL}_n$. Тогда ${}_E G = \operatorname{Aut}(A)$, ${}_E X = \operatorname{SB}(A)$ — многообразие правых идеалов в A размерности n . Заметим, что $\operatorname{SB}(A)(K)$ непусто тогда и только тогда, когда $A \simeq M_n$. Вообще, свойства многообразия $\operatorname{SB}(A)$ отражают свойства исходного торсора.

Пример 2.1.2. Пусть $G = \operatorname{O}_n$, $q \in H_1(K, \operatorname{O}_n)$ — невырожденная квадратичная форма ранга n .

$E = \operatorname{Isom}(q_0, q)$, где q_0 расщепима (то есть, имеет вид $\langle 1, -1 \rangle \perp \dots \perp \langle 1, -1 \rangle$ плюс, возможно, слагаемое $\langle 1 \rangle$).

$X = \{q_0 = 0\}$ в проективном смысле. Тогда $Q = {}_E X = \{q = 0\}$. Заметим, что $Q(K)$ непусто тогда и только тогда, когда форма q изотропна, то есть, $q \simeq \langle 1, -1 \rangle \perp q'$. Этот факт остается верным при любом расширении L/K : $Q(L)$ непусто тогда и только тогда, когда форма q_L изотропна.

Факт 2.1.3. Пусть q имеет вид $\langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_k \rangle$. Тогда

Форма q_L изотропна тогда и только тогда, когда она расщепима (то есть,

$$\text{раскладывается в сумму форм вида } \langle 1, -1 \rangle). \quad (*)$$

Наоборот, если $\dim q$ четна и $(*)$ выполнено для любого расширения полей, то q пфистерова с точностью до скаляра. Если же $\dim q$ нечетна, то $q \perp \langle 1 \rangle$ пфистерова с точностью до скаляра.

Таким образом, от торсора E можно переходить к многообразию ${}_E X$ (и можно варьировать X), смотреть на его инварианты (в смысле алгебраической геометрии) и получать отсюда информацию об инвариантах торсора.

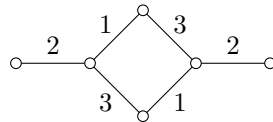
Пусть X — гладкое проективное многообразие. Мы ограничимся случаем, когда X *однородное*, то есть, $G(\overline{K})$ действует на $X(\overline{K})$ транзитивно (заметим, что это означает, что отображение $G \times X \rightarrow X \times X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$ сюръективно как пучок, а не в категорном смысле; категорное понятие эпиморфизма не подходит для наших целей: например, отображение $\operatorname{Spec} \mathbb{Q} \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ сюръективно в категории схем). Неформально говоря, у G на X одна орбита. Тогда X называется **проективным однородным многообразием**.

Как строить проективные однородные многообразия? Пусть G — расщепимая группа, V — неприводимое представление (в положительной характеристике нужно действовать осторожно). Рассмотрим $\mathbb{P}(V)$ — многообразие прямых в V , проходящих через 0. У группы G есть ровно одна замкнутая орбита на $\mathbb{P}(V)$ — это и есть наше X . На самом деле, все проективные однородные многообразия так получаются (но не обязательно единственным образом).

Пример 2.1.4. $G = \mathrm{SL}_n$ действует на $V = K^n$ (имеется в виду обычное, *векторное* представление). Пусть u, v — два вектора. Можно ли найти g такое, что $\langle gu \rangle = \langle v \rangle$ (здесь через $\langle x \rangle$ мы обозначаем прямую, натянутую на x)? Ответ — можно, если u и v отличны от 0. Значит, в K^n есть две орбиты действия группы G : $\{0\}$ и $\{v \mid v \neq 0\}$. После проективизации в $\mathbb{P}(K^n) = \mathbb{P}^{n-1}$ остается только одна орбита.

Пример 2.1.5. $G = \mathrm{SL}_n$ действует на $V = \Lambda^k(K^n)$, $k = 1, \dots, n-1$. На неразложимых поливекторных орбитах много, но на разложимых действие транзитивно. Свойство «быть разложимым» определяется уравнениями Плюккера. Орбита в $\mathbb{P}(\Lambda^k(K^n))$ — это $\mathrm{Gr}(k, n)$.

Пусть, к примеру, $n = 4$, $k = 2$. Диаграмма Хассе весов нашего представления выглядит так:



Разложимый тензор задается двумя векторами. Запишем их в базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) : $(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) \wedge (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4)$. Обозначим координату тензора x при бивекторе $e_i \wedge e_j$ через x_{ij} . Тогда разложимость x равносильно обращению в 0 выражения $x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}$. Это следует, например, из соотношения на миноры матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$.

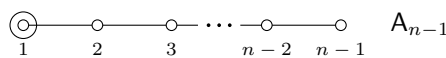
2.2 Параболические подгруппы

Оказывается, любое X , являющееся орбитой в $\mathbb{P}(V)$, задается квадратичными уравнениями в проективных координатах.

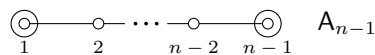
Пусть $v \in V$, $X = G \cdot \langle v \rangle$ — орбита вектора v . Тогда $\mathrm{Stab}_G(\langle v \rangle) = P$ — параболическая подгруппа в G . Проективное однородное многообразие задается подгруппой P с точностью до сопряженности.

Посмотрим, как тор T в G действует на вектор v . Из равенства $T\langle v \rangle = \langle v \rangle$ следует, что найдется $\lambda: T \rightarrow \mathbb{G}_m$ (**вес** неприводимого представления V) такое, что $tv = \lambda(t)v$ для всех $t \in T$. Представление задается своим старшим весом (точнее, орбитой веса относительно W , но в этой орбите есть единственный доминантный вес). Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ — простые корни. Рассмотрим базис $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_l^\vee$ в двойственном пространстве, где α_i^\vee определяется равенством $\alpha_i^\vee(\beta) = \frac{2(\alpha_i, \beta)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$. Пусть $\varpi_1, \dots, \varpi_l$ — двойственный к нему базис. Таким образом, $\frac{2(\alpha_i, \varpi_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \delta_{ij}$. Эти элементы $\varpi_1, \dots, \varpi_l$ называются **фундаментальными весами**. Вес λ раскладывается по этому базису следующим образом: $\lambda = \sum m_i \varpi_i$. После этого X (и P) зависит только от того, какие из m_i не равны 0. То есть, проективные однородные многообразия задаются подмножеством вершин на диаграмме Дынкина, состоящим из тех вершин, для которых $m_i \neq 0$. Мы будем их обводить на картинке.

Например, картинка для проективного пространства такая:



Это соответствует векторному представлению $V = V(\varpi_1)$ группы SL_n . Вообще, если на диаграмме A_{n-1} обвести вершину с номером k , получится $\mathrm{Gr}(k, n)$. Есть еще, например, присоединенное представление: SL_n действует на своей алгебре Ли $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n)$. Картинка для этого представления такая:



Первая вершина соответствует V , последняя — V^* , в итоге получаем $V^* \otimes V \simeq \mathrm{End}(V)$.

Если обведена одна вершина ($V = V(\varpi_i)$), то P называется **максимальной** параболической. Если все вершины обведены, то P называется **борелевской** (это минимальная среди параболических). Любая гладкая замкнутая подгруппа, содержащая B , называется **параболической** и получается таким образом: $B \leq P \leq G$.

Пусть теперь на диаграмме Дынкина системы A_{n-1} обведены вершины с номерами k_1, \dots, k_m . Полученное многообразие можно описать в терминах стандартного представления $V = K^n$ группы

SL_n . А именно,

$$X = \{U_1 \leq \dots \leq U_m \mid \dim U_i = k_i\}.$$

Такое X называется **многообразием флагов**. При этом SL_n действует на X транзитивно. Заметим, что тензорное произведение $V(\varpi_{k_1}) \otimes \dots \otimes V(\varpi_{k_m})$ уже не обязано быть неприводимым, но можно взять кусок, соответствующий весу $\varpi_{k_1} + \dots + \varpi_{k_m}$.

Так мы описали все однородные проективные многообразия для группы SL_n . В общем случае (для произвольной G) иногда однородное проективное многообразие называют **обобщенным флаговым многообразием**. Его можно описать так:

$$X = \{P' \leq G \mid P' \text{ сопряжена с } P\},$$

где значок $P' \leq G$ означает, что P' — гладкая замкнутая подгруппа в G . Более точно,

$$X(R) = \{P' \leq G_R \mid \text{существуют } S/R, g \in G(S) : gP'g^{-1} = P\}.$$

После подкрутки на торсор E получаем

$${}_E X = \{P' \leq {}_E G \mid P'_K \text{ сопряжена с } P_K \text{ внутри } ({}_E G)_K = G_K\}.$$

Обратите внимание, что в ${}_E G$ никакой P может не оказаться.

Проективное однородное многообразие X **изотропно**, если $X(K) \neq \emptyset$. Сама группа ${}_E G$ называется **изотропной**, если для какого-то проективного однородного многообразия ${}_E X$, отличного от точки, ${}_E X$ изотропно.

Пусть $G = \mathrm{PGL}_n$. Ее скрученная форма ${}_E G$ имеет вид $\mathrm{Aut}(A)$, а соответствующая скрученная форма проективного пространства — $\mathrm{SB}(A)$. Заметим, что у PGL_n (в отличие от SL_n) нет векторного представления. Почему? Для начала поймем, откуда берется скрученная форма SL_n . Отображение определителя $\det: \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathbb{G}_m$ скручивается в *приведенную норму* (*reduced norm*)

$$\mathrm{Nrd}: A^* = \mathrm{GL}_1(A) \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

Ядро этого отображения обозначается через $\mathrm{SL}_1(A) = \{g \in A \mid \mathrm{Nrd}(g) = 1\}$. Например, $(\mathrm{Nrd}(x))^n = \det(y \mapsto xy)$.

Решетка корней содержится в решетке весов:

$$\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_l \leq \mathbb{Z}\varpi \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\varpi_l$$

Диаграммы Дынкина классифицируют расщепимые полупростые группы с точностью до изогении, а класс изоморфности внутри класса изогении задается промежуточной решеткой между этими двумя (с точностью до внешних автоморфизмов). Минимальная решетка $\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_l$ соответствует присоединенной группе (без центра); максимальная решетка $\mathbb{Z}\varpi_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\varpi_l$ соответствует односвязной группе (у нее самый большой центр).