

# Мотивы Воеводского и арифметика линейных алгебраических групп \*

Иван Панин

Виктор Петров

2012

## 1 Введение

### 1.1 Планы

Работа Панина и Пименова о квадратичных формах.

Простая формулировка. Пусть  $K = \mathbb{C}(z_1, \dots, z_n)$  и  $R := \{\frac{g(z)}{h(z)} \mid h(0) \neq 0\} \subset K$  — регулярные функции в окрестности 0. Пусть  $u \in R^\times$ . Рассмотрим уравнение

$$T_1^2 + \dots + T_k^2 = u.$$

(Предполагаем  $k \geq 2$ .) Если уравнение имеет решение в  $K$ , то оно имеет решение и в  $R$ .

Интересующая нас задача: классифицировать простые алгебраические группы над произвольным полем (или локальным регулярным кольцом). В каком смысле — мы объясним. Что такое простые алгебраические группы — это обсуждается в записках спецкурса.

Как все знают, над алгебраически замкнутыми полями классификацию простых алгебраических групп дают диаграммы Дынкина. Среди них — четыре бесконечные серии, которым соответствуют следующие присоединенные группы:

- $A_n$  —  $\mathrm{PGL}_{n+1}$ .
- $B_n$  —  $\mathrm{SO}_{2n+1}$ .
- $C_n$  —  $\mathrm{PGSp}_{2n}$ .
- $D_n$  —  $\mathrm{SO}_{2n}$ .

Исключительные группы:  $E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ .

Имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathrm{SL}_n \rightarrow \mathrm{PGL}_n \rightarrow 1.$$

«Теорема типа Спрингера»: пусть  $G$  и  $G'$  — группы типа  $G_2$  над полем  $K$ . Пусть расширение  $[L : K]$  нечетное. Тогда если  $G_L \simeq G'_L$ , то  $G \simeq G'$ .

С точностью до каких-то тонкостей, имеем

$$H^1(K, G_0^{ad}) \approx \{\text{присоед. простые алг. группы над } K \text{ того же типа, что и } G_0\}.$$

Это соответствие функториально в том смысле, что расширение полей  $L/K$  индуцирует морфизм  $H^1(K, G^{ad}) \rightarrow H^1(L, G^{ad})$ .

---

\*Конспект лекций семинара весны 2012 года; предварительная версия. Автор Т<sub>Е</sub>X-версии — Александр Лузгарев. Основано на конспекте Алексея Бешенова первых двух лекций.

Наша высокая цель — построить функтор  $F$ , сопоставляющий полям абелевы группы с гомоморфизмом следа, так что конечное расширение  $[L : K]$  давало бы морфизм  $F(L) \rightarrow F(K)$  и естественное преобразование

$$H^1(K, G_0^{ad}) \rightarrow F(K).$$

Например, для  $G_0 = \mathrm{PGL}_2 = \mathrm{Aut}(M_2)$  ответ такой:

$$F: K \rightsquigarrow K_2^M(K)/2,$$

где  $K_2^M(K) = I^2(K)/I^3(K)$ .

## 1.2 Теорема Меркурьева–Суслина и гипотеза Блоха–Като

Пусть  $A$  — центральная простая алгебра над полем  $K$  (более общее понятие — **алгебра Азумаи**, **Azumaya algebra**). Ей соответствует элемент  $[A]$  в группе Брауэра  $\mathrm{Br}(K)$ .

- **Теорема Меркурьева** (1981) — изоморфизм  ${}_2\mathrm{Br}(K) \simeq K_2^M/2$ , а также следствие про  $[A] \in {}_2\mathrm{Br}(K)$ .  
[\[http://www.mathunion.org/ICM/ICM1986.1/Main/icm1986.1.0389.0393.ocr.pdf\]](http://www.mathunion.org/ICM/ICM1986.1/Main/icm1986.1.0389.0393.ocr.pdf)  
[\[http://www.math.ethz.ch/~knus/sridharan/merkurjev84.pdf\]](http://www.math.ethz.ch/~knus/sridharan/merkurjev84.pdf)
- **Теорема Меркурьева–Суслина** (1982) — изоморфизм  ${}_p\mathrm{Br}(K) \simeq K_2^M/p$ .  
[L.H. Rowen, Ring theory, Vol. 2, §7.2]
- **Гипотеза Блоха–Като** («norm residue isomorphism theorem») —  $K_n^M/p(-) \simeq H_{\mathrm{\acute{e}t}}^n(-, \mu_p^{\otimes n})$ .  
[\[http://arxiv.org/abs/0805.4430\]](http://arxiv.org/abs/0805.4430)

## 1.3 Кольцо Гротендика–Витта

$H^1(K, \mathrm{O}_n)$  — это классы изометрии невырожденных квадратичных форм ранга  $n$ .

Имеется функтор в кольцо Витта

$$H^1(K, \mathrm{O}_n) \rightarrow W(K), \quad f \mapsto [f].$$

Разберемся, что такое **кольцо Витта**  $W(K)$ . Его образующие — классы изометрии квадратичных форм над  $K$ , а соотношения выглядят так:

$$\begin{aligned} [f] + [g] &= [f \perp g], \\ [f] \cdot [g] &= [f \otimes g], \\ \mathbb{H} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\mathbb{H}$  — класс изометрии двумерной квадратичной формы  $f(x, y) = xy$ , а  $f \perp g$  имеет следующий смысл. Если  $f$  — квадратичная форма на  $V$ , а  $g$  — квадратичная форма на  $W$ , то на  $V \oplus W$  задается квадратичная форма  $(f \perp g)(u \oplus v) := f(u) + g(v)$ .

Имеется корректно определенный гомоморфизм

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}: W(K) &\rightarrow \mathbb{Z}/2, \\ [f] &\mapsto \mathrm{rk} f \pmod{2}. \end{aligned}$$

$I := \ker \mathrm{rk}$  называется **фундаментальным идеалом**.

**Кольцо Гротендика–Витта**  $GW(K)$  определяется следующим образом. В нем те же образующие, но нет условия  $[xy] = 0$ . Сначала определяется сложение и умножение, делающее  $GW(K)$  полукольцом:

$$\begin{aligned} [f] + [g] &= [f \perp g], \\ [f] \cdot [g] &= [f \otimes g]. \end{aligned}$$

Потом мы берем группу Гротендика и получаем кольцо.

## 1.4 $\mathbb{A}^1$ -гомотопии и гипотеза Мореля

[<http://mathunion.org/ICM/ICM1998.1/Main/00/Voevodsky.MAN.ocr.pdf>]

$\mathbb{A}^1$ -гомотопическая категория пространств с отмеченными точками над  $K$ .

Сфера  $S^0 = \{+, \bullet\}$  состоит из двух точек, из которых  $\bullet$  — отмеченная.

Теорема Мореля (1999?) состоит в вычислении

$$\pi_0^{stab}(S^0) \simeq \text{GW}(K)$$

Fabien Morel, On The Motivic  $\pi_0$  of the Sphere Spectrum.

[http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-0948-5\\_7](http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-0948-5_7)

Желаемый функтор  $F$  мог бы давать  $H^1(K, G) \rightarrow H_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\text{et}}G)$ .

Аналог этого в топологии следующий. Пусть задано главное  $G$ -расслоение  $\mathfrak{g} \rightarrow X$  для клеточного пространства  $X$ . Сопоставим ему отображение в классифицирующее пространство  $X \xrightarrow{f_{\mathfrak{g}}} BG$ .

Существует соответствие между множеством классов изоморфности главных  $G$ -расслоений над  $X$  и гомотопическими классами  $[X, BG]$ .

Имеется инъекция

$$[X, BG] = \pi_0(\text{Map}(X, BG)) \hookrightarrow H_0(\text{Map}(X, BG)).$$

Гипотеза Мореля заключается в том, что в алгебраической ситуации тоже получается инъекция

$$[\text{Spec } K, B^{\text{et}}G] = \pi_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\text{et}}G) \hookrightarrow H_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\text{et}}G).$$

## 1.5 Формы Пфистера

Рассмотрим фильтрацию на кольце Витта

$$W(K) \supset I \supset I^2 \supset I^3 \supset \dots$$

**Теорема 1.5.1.**  $\bigcap_n I^n = \{0\}$ .

Мы уже знаем, что  $W(K)/I = \mathbb{Z}/2$ .  $I/I^2$  как абелева группа порождается элементами вида  $\langle\langle a \rangle\rangle := x^2 - ay^2$  для некоторого  $a \in K^\times$ . Более общо,  $I^n/I^{n+1}$  порождается тензорными произведениями элементов

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle = \langle\langle a_1 \rangle\rangle \otimes \dots \otimes \langle\langle a_n \rangle\rangle.$$

$\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$  называется  $n$ -кратной формой Пфистера.

**Пример 1.5.2.** При  $n = 1$  имеем  $a \in K^*/(K^*)^2$ ;  $K(\sqrt{a})$  — квадратичное расширение.

При  $n = 2$  символ  $\langle\langle a, b \rangle\rangle$  есть норма алгебры кватернионов  $H = (a, b)$  над  $K$ .

При  $n = 3$  символ  $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$  есть норма алгебры октонионов  $(a, b, c)$  над  $K$  (что соответствует группам типа  $G_2$  над  $K$ ).

**Теорема 1.5.3** (Арасон). Если  $[q] \in I^n$ , то  $\text{rk } q \geq 2^n$ . Если при этом  $\text{rk } q = 2^n$ , то  $q \simeq \alpha \cdot \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ , где  $\alpha \in K^\times$ . В частности,  $\bigcap I^n = 0$ .

- $e_0(q) := \text{rk } q \pmod{2}$ .
- Если  $e_0 = 0$ , то  $[q] \in I$ . Определим  $e_1(q) := [q] \in I/I^2$ . Этому соответствует  $\langle\langle a \rangle\rangle$ , где  $a$  — дискриминант  $q$  (с точностью до знака?).
- Если  $e_1 = 0$ , то  $e_2(q) := [q] \in I^2/I^3$ . Форме  $q$  можно сопоставить  $C_0^+(q)$ , четную положительную часть алгебры Клиффорда, это будет центральная простая алгебра. Имеем  $[C_0^+(q)] \in {}_2\text{Br}(K)$ . По теореме Меркурьева, это сумма

$$[(a_1, b_1)] [(a_2, b_2)] \dots [(a_k, b_k)]$$

$$\langle\langle a_1, b_1 \rangle\rangle + \langle\langle a_2, b_2 \rangle\rangle + \dots + \langle\langle a_k, b_k \rangle\rangle.$$

- Если  $e_2(q) = 0$ , то можно определить  $e_3(q)$  — инвариант Арасона.

## 1.6 Торсоры

Пусть  $G$  — простая алгебраическая группа над  $K$ .

$G$ -**торсором** называется многообразие  $X$  над  $K$ , такое что

- определено действие  $G \times X \rightarrow X$ ;
- над алгебраическим замыканием  $\bar{K}$  имеется изоморфизм  $X_{\bar{K}} \simeq G_{\bar{K}}$  (как многообразий с  $G$ -действием).

Раньше торсоры назывались «главными однородными пространствами» (principal homogeneous space).

**Пример 1.6.1.** Действие  $G$  сдвигами на себе дает **тривиальный  $G$ -торсор**.

По определению,  $H^1(K; G)$  есть множество классов изоморфности  $G$ -торсоров с отмеченной точкой (тривиальный  $G$ -торсор).

**Пример 1.6.2.** Зафиксируем  $a \in K$ . Для каждой  $K$ -алгебры  $R$  положим  $\mu_2(R) = \{x \in R \mid x^2 = 1\}$ ,  $X(R) := \{y \in R \mid y^2 = a\}$ . Получаем схемы  $\mu_2$  и  $X$ , причем  $\mu_2$  действует на  $X$  умножением: если  $y^2 = a$ ,  $x^2 = 1$ , то  $(xy)^2 = a$ .

$X$  — тривиальный  $G$ -торсор iff у него есть рациональная точка:  $X(K) \neq \emptyset$ .

Если  $G$  — абелева группа, то на торсорах имеется сложение. При этом  $H^1(K, \mu_2) \simeq K^*/(K^*)^2$  как абелева группа. И вообще  $H^1(K, \mu_n) \simeq K^*/(K^*)^n$ .

## 1.7 Скрученные формы

Напомним, что  $O_{2n} = \text{Aut}(q_{\text{split}})$ , где  $q_{\text{split}} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$  — **расщепимая форма** (от переменных  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ ).

$H^1(K, O_{2n})$  можно отождествить с множеством классов изометрии невырожденных квадратичных форм ранга  $2n$ . Действительно, пусть  $q$  — квадратичная форма. Мы утверждаем, что  $\text{Iso}(q_{\text{split}}, q)$  есть искомый торсор: на нем действует  $O_{2n}$ . Здесь  $\text{Iso}(\varphi, \psi)$  обозначает функтор изоморфизмов между квадратичными формами  $\varphi$  и  $\psi$ ; более точно,  $\text{Iso}(\varphi, \psi)(R) = \{f: \varphi_R \rightarrow \psi_R \mid f \text{ — изоморфизм}\}$ . Над алгебраически замкнутым полем  $q$  изоморфна  $q_{\text{split}}$ , и получается  $\text{Iso}(q_{\text{split}}, q_{\text{split}}) = \text{Aut}(q_{\text{split}}) = O_{2n}$ .

Пусть  $A$  — некоторая алгебраическая структура над полем  $K$  (например, квадратичное пространство, конечномерная ассоциативная алгебра, конечномерная неассоциативная алгебра). Тогда **скрученная форма**  $A'$  для  $A$  есть такая структура над  $K$ , что при переходе к алгебраическому замыканию  $A'_{\bar{K}} \simeq A_{\bar{K}}$ .

**Теорема.**  $H^1(K, \text{Aut}(A))$  есть множество классов изоморфности скрученных форм  $A$  над  $K$ .

Изоморфизм такой:

$$A' \xrightarrow{\sim} \text{Iso}(A, A').$$

На  $\text{Iso}(A, A')$  есть структура алгебраического многообразия.

**Замечание.** Пусть  $X$  — проективное многообразие над  $K$ . Теорема (Гротендик): *функтор*  $U \mapsto \text{Aut}_U(X \times U)$  *представим в схемах*; то есть, существует схема  $R$  такая, что  $\text{Aut}_U(X \times U)$  естественно изоморфно  $\text{Hom}(U, R)$ .

Контрпример:  $\text{Aut}(\mathbb{A}^n)$  не конечномерно.

Пример:  $A := M_n(K)$ .  $\text{Aut}(A) = \text{PGL}_n$ .

$H^1(K, M_n(K))$  — это скрученные формы  $M_n(K)$ , то есть центральные простые алгебры размерности  $n^2$ , взятые с точностью до изоморфизма.

$\text{Aut}(\mathbb{P}^{n-1}) = \text{PGL}_n = \text{GL}_n / \mathbb{G}_m$ .

Автоморфизмы сохраняют ранг.

$H^1(K, \text{PGL}_n)$  есть множество скрученных форм  $\mathbb{P}^{n-1}$  над  $K$  = **многообразия Севери–Брауэра**.

$$A \mapsto \text{SB}(A) = \{\text{левые идеалы } I \leq A \mid \dim_K(I) = n\}$$

Пример при  $n = 2$ : кватернионы  $A = (a, b)$ .  
 $\beta u + \gamma v + \delta uv$ . Имеем векторное пространство  $u, v, uv$ . Условие  $\{\text{норма} = 0\}$  задает проективное подмногообразие в  $\mathbb{P}^2$ .  
 $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$  — коника.

$$\begin{aligned} \mathrm{PGL}_2 &\simeq \mathrm{SO}_3, \\ \{\text{кватернионы}\} &\simeq \{\text{формы ранга 3 с трив. дискриминантом}\}. \end{aligned}$$

## 1.8 Точные последовательности алгебраических групп

Точность последовательности алгебраических групп над  $K$

$$1 \rightarrow C \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$$

означает следующее:

1.  $C$  — алгебраическая подгруппа в  $H$ .
2. После расширения скаляров  $H(\overline{K}) \rightarrow G(\overline{K})$  является сюръекцией над алгебраическим замыканием поля  $K$ .
3.  $C = \ker(H \rightarrow G)$ ,  $C(R) = \ker(H(R) \rightarrow G(R))$ .

**Пример 1.8.1.** Следующая последовательность алгебраических групп точна в указанном смысле:

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1,$$

где  $\mathbb{G}_m(K) := \{(x, y) \in K^2 \mid xy = 1\}$ , и отображение  $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$  есть  $x \mapsto x^2$  (это сюръекция над алгебраическим замыканием).

**Пример 1.8.2.** Следующая последовательность точна:

$$\mu_2(K) \rightarrow K^\times \rightarrow K^\times \rightarrow H^1(K, \mu_2) \rightarrow H^1(K, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(K, \mathbb{G}_m).$$

(Отображение  $K^\times \rightarrow K^\times$  есть  $x \mapsto x^2$ .)

**Теорема 1.8.3** (Теорема Гильберта 90).

$$\begin{aligned} H^1(K, \mathbb{G}_m) &= \{\bullet\}, \\ H^1(K, \mathrm{GL}_n) &= \{\bullet\}. \end{aligned}$$

Из точности последовательности выше и теоремы 90 получается

$$H^1(K, \mu_2) \simeq K^\times / (K^\times)^2.$$

**Пример 1.8.4.** Точная последовательность

$$1 \rightarrow \mathrm{SL}_n \rightarrow \mathrm{GL}_n \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m \rightarrow 1.$$

приводит к последовательности

$$\mathrm{GL}_n(K) \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m(K) \rightarrow H^1(K, \mathrm{SL}_n) \rightarrow H^1(K, \mathrm{GL}_n).$$

Здесь  $H^1(K, \mathrm{SL}_n) = \{\bullet\}$  и  $H^1(K, \mathrm{GL}_n) = \{\bullet\}$ .

**Пример 1.8.5.**

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathrm{SL}_n \rightarrow \mathrm{PGL}_n \rightarrow 1.$$

$$\mu_n(K) \rightarrow \mathrm{SL}_n(K) \rightarrow \mathrm{PGL}_n(K) \rightarrow K^\times / (K^\times)^2 \rightarrow \{\bullet\} \rightarrow H^1(K, \mathrm{PGL}_n).$$

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathrm{PGL}_n \rightarrow 1.$$

**Пример 1.8.6.**

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_n &\rightarrow \mathrm{PGL}_n, \\ g &\mapsto (x \mapsto g x g^{-1}) \in \mathrm{Aut}(M_n). \end{aligned}$$

Это сюръекция алгебраических групп, но не сюръекция на точках.

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathrm{SL}_n \rightarrow \mathrm{PGL}_n \rightarrow 1.$$

**Теорема 1.8.7.** *Если имеется точная последовательность  $1 \rightarrow C \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$ , то возникает точная последовательность множеств с отмеченной точкой*

$$1 \rightarrow C(K) \rightarrow H(K) \rightarrow G(K) \rightarrow H^1(K, C) \rightarrow H^1(K, H) \rightarrow H^1(K, G).$$

См. книгу Серра «Когомологии Галуа».

## 1.9 Вторые когомологии

- Напомним, что  $H^1(F, G)$  — множество  $G$ -торсоров. Если  $G$  коммутативна, то это аффинная алгебраическая группа.  
(Как в этом случае умножаются торсоры? — Что-то типа  $E_1 * E_2 = (E_1 \times E_2) / ((e_1, e_2) = (g e_1, g e_2))$ .)
- $H^0(F, G)$  — это функтор  $F \rightsquigarrow G(F)$ , т.е. функтор точек. Если  $G$  коммутативна, то  $H^i(F, G)$  можно определить как  $i$ -й производный функтор. При  $i = 1$  это совпадает с первым определением.

**Теорема 1.9.1.** *Пусть имеется точная последовательность  $1 \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$ . Предположим, что  $C \leq \mathrm{Cent}(G)$ . Тогда точная последовательность продолжается до вторых когомологий:*

$$1 \rightarrow C(F) \rightarrow G(F) \rightarrow H(F) \rightarrow H^1(F, C) \rightarrow H^1(F, G) \rightarrow H^1(F, H) \rightarrow H^2(F, C).$$

**Пример 1.9.2.**  $H^2(F, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(F)$  — группа Брауэра поля  $F$ : она состоит из классов эквивалентности  $[A]$  центральных простых алгебр  $A$  над  $F$ ; умножение выглядит так:  $[A] \cdot [B] = [A \otimes_F B]$ .

Пусть  $X$  — квазипроективное многообразие. Тогда  $H^2(X, \mathbb{G}_m)_{\mathrm{tors}} = \mathrm{Br}(X)$  (теорема Габбера (Gabber)). (Загадочное замечание: подразумевается топология  $\mathrm{fppf}$ , а для этальной топологии в определении торсора вместо  $\bar{F}$  нужно взять  $F^{\mathrm{sep}}$ .)

**Пример 1.9.3** (Топологический аналог). Пусть  $X$  — хорошее топологическое пространство (например, область в  $\mathbb{R}^n$ , многообразие или CW-комплекс).

Пусть  $G$  — топологическая группа (например,  $S^1$ ,  $S^3$ ,  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ ,  $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$ ).

Имеется левое действие  $G \times (G \times X) \rightarrow (G \times X)$ ,  $g_1 \cdot (g_2, x) \mapsto (g_1 g_2, x)$ .

Левое действие послойно и свободно на скрученной форме  $G \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ .

Для всех  $x \in X$  возникает действие  $G \times \mathcal{G}(x) \rightarrow \mathcal{G}(x)$ . Здесь  $\mathcal{G}(x) \simeq G$ , и этот изоморфизм зависит от  $x$ .

$(\mathcal{G}, G \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G})$  в топологии называется **главным  $G$ -расслоением (principal  $G$ -bundle)**.

$\mathcal{G}/G = X$ .

**Пример 1.9.4.**  $\mathbb{C}^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^1)$ .

Пусть  $L \rightarrow X$  — комплексное линейное расслоение,  $z(X)$  — нулевое сечение.

Рассмотрим отображение  $\mathbb{C}^\times \times (L - z(X)) \rightarrow (L - z(X))$ ,  $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ . Имеем изоморфизм  $L(x) - 0 \simeq \mathbb{C}^\times$ , зависящий от  $x$ .

- Тогда  $H^1(X, \mathbb{C}^\times)$  — классы изоморфизма  $\mathbb{C}^\times$ -торсоров над  $X$ . Они соответствуют линейным расслоениям над  $X$ : расслоению  $L$  соответствует описанный выше торсор  $L - z(X)$ , и по торсору  $\mathcal{G}^\times$  можно построить расслоение  $\mathcal{L}$ .
- Таким образом, мы видим, что  $H^1(X, \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^1))$  — это скрученные формы расслоения  $\mathbb{C} \times X$  над  $X$ .

- Аналогично,  $H^1(X, \text{Aut}(\mathbb{C}^n))$  — это (1) скрученные формы расслоения  $\mathbb{C}^n \times X$  над  $X$ , то есть (2) векторные расслоения над  $X$  со слоем  $\mathbb{C}^n$  (с точностью до изоморфизма).
- Пусть  $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}, \sum u_i v_i)$  — автоморфизмы, сохраняющие квадратичную форму. Тогда

$$H^1(X, \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}, \sum u_i v_i))$$

— это (1) скрученные формы расслоений вида  $(\mathbb{C}^n \times X, \sum u_i, v_i) \rightarrow X$ , то есть (2) векторные расслоения  $E \rightarrow X$  со слоем  $\mathbb{C}^n$  и с квадратичной формой в слоях.

- Рассмотрим  $\text{Aut}(M_n(\mathbb{C})) = \text{PGL}_n(\mathbb{C})$ . Тогда  $H^1(X, \text{Aut}(M_n(\mathbb{C})))$  — это скрученные формы расслоений вида  $M_n(\mathbb{C}) \times X \rightarrow X$ . Например, по каждому расслоению  $E \rightarrow X$  можно построить расслоение  $\text{End}(E) \rightarrow X$ , и послойно  $\text{End}(E)(x) = \text{End}(E(x))$ . Но бывают и расслоения, не изоморфные никакому  $\text{End}(E) \rightarrow X$  — это нетривиальные топологические алгебры Адзумаи.

Имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^\times \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{PGL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow 1.$$

Отсюда получается точная последовательность

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \Gamma(X, \mathbb{C}^\times) \rightarrow \Gamma(X, \text{GL}_n(\mathbb{C})) \rightarrow \Gamma(X, \text{PGL}_n(\mathbb{C})) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}^\times) \rightarrow H^1(X, \text{GL}_n(\mathbb{C})) \rightarrow H^1(X, \text{PGL}_n(\mathbb{C})) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C}^\times). \end{aligned}$$

**Топологическая группа Брауэра** есть  $\text{Br}_{\text{top}}(X) := H_{\text{top}}^2(X, \mathbb{C}^\times)$ .

**Пример 1.9.5.** Мы утверждаем, что

$$H^2(X, S^1) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}}.$$

Заметим, что  $\mathbb{C}^\times \simeq S^1 \times \mathbb{R}$ . Имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow S^1 \rightarrow 0,$$

откуда получаем точную последовательность

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^2(X, S^1) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X, \mathbb{R}) = H^3(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}.$$

Обозначим отображение  $H^3(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$  через  $\alpha$ . Тогда связывающий гомоморфизм дает нам отображение  $H^2(X, S^1) \rightarrow \ker(\alpha) = H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$ .

На самом деле,

$$\text{Br}_{\text{top}}(X) = H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}}.$$

Нечто такое написано как определение (у Серра? Гротендика?).

А какие нам известны нетривиальные скрученные формы алгебры  $M_n(K)$ ? Так это и есть центральные простые алгебры.

Имеем точную последовательность  $1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \text{GL}_n \rightarrow \text{PGL}_n \rightarrow 1$ , откуда

$$H^1(F, \text{GL}_n) \rightarrow H^1(F, \text{PGL}_n) \rightarrow H^2(F, \mathbb{G}_m).$$

При этом  $H^1(F, \text{GL}_n) = \{\bullet\}$ , и  $H^1(F, \text{PGL}_n)$  — центральные простые алгебры степени  $n$ . Это отображение дает изоморфизм

$$\begin{aligned} \text{Br}(F) &\simeq H^2(F, \mathbb{G}_m), \\ A &\mapsto [A]. \end{aligned}$$

Имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1,$$

где  $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$  — отображение  $x \mapsto x^n$ .

Получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(F, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^2(F, \mu_n) & \longrightarrow & H^2(F, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^2(F, \mathbb{G}_m) , \\ \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\ \{\bullet\} & & & & \text{Br}(F) & \xrightarrow{\cdot n} & \text{Br}(F) \end{array}$$

откуда  $H^2(F, \mu_n) = {}_n \text{Br}(F)$ .

Еще один пример: пусть  $\text{char } F \neq 2$ . Имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \text{SO}_n \rightarrow \text{O}_n \xrightarrow{\det} \mu_2 \rightarrow 1.$$

Тогда

$$\text{O}_n(F) \twoheadrightarrow \mu_2(F) \rightarrow H^1(F, \text{SO}_n) \rightarrow H^1(F, \text{O}_n) \xrightarrow{\text{disc}} H^1(F, \mu_2) = F^*/(F^*)^2.$$

Отсюда  $H^1(F, \text{SO}_n)$  (невырожденные квадратичные формы дискриминанта 1) — подмножество в  $H^1(F, \text{O}_n)$  (невырожденные квадратичные формы ранга  $n$  с точностью до изометрии).

Это дает нам инвариант  $\text{disc} = e_1: I \rightarrow I/I^2 \simeq F^*/(F^*)^2$ .

Еще один пример:

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \text{Spin}_n \rightarrow \text{SO}_n \rightarrow 1.$$

$$\text{Spin}_n(F) \rightarrow \text{SO}_n(F) \xrightarrow{N} H^1(F, \mu_2) \xrightarrow{0} H^1(F, \text{Spin}_n) \rightarrow H^1(F, \text{SO}_n) \xrightarrow{e_2} H^2(F, \mu_2).$$

Здесь

- $H^2(F, \mu_2) = {}_2 \text{Br}(F)$ .
- $N$  — **спинорная норма**. А именно, каждый элемент  $\text{SO}_n$  раскладывается в произведение отражений  $g = S_{v_1} \cdots S_{v_{2k}}$ ; тогда  $N(g) := q(v_1) \cdots q(v_{2k}) \pmod{(F^\times)^2}$ .
- Отображение  $\text{Spin}_n(F) \rightarrow \text{SO}_n(F)$  уже не обязательно является сюръективным.
- Мы не знаем, что такое  $H^1(F, \text{Spin}_n)$ . Отображение  $H^1(F, \mu_2) \rightarrow H^1(F, \text{Spin}_n)$  равно 0 по теореме Эйхлера.

Самая правая стрелка в этой длинной последовательности дает нам инвариант  $e_2: I^2 \rightarrow I^2/I^3 = {}_2 \text{Br}(F)$ . Его можно описать так: по форме  $q$  можно построить алгебру Клиффорда  $C(q)$  с четной частью  $C_0(q)$ . Тогда  $e_2$  сопоставляет форме  $q \in I^2$  класс  $[C_0^+(q)]$  в  $\text{Br}(F)$ .

Пусть  $E$  — левый  $G$ -торсор,  $G$  действует на  $X$  справа. Рассмотрим скрученную форму  $X$

$${}_E X := (X \times E)/(x, e) \sim (x g^{-1}, g e).$$

На ней действует  ${}_E G$ . Действительно,  $E_G = \text{Aut}_{G\text{-торс}}(E)$  — автоморфизмы  $E$  как  $G$ -торсора.  ${}_E G$  является группой (тут  $G$  действует сопряжениями на себе).

**Пример 1.9.6.** Рассмотрим  $H^1(F, \text{O}_n)$ .

$E \in H^1(F, \text{O}_n)$  задается квадратичной формой  $q$ , и  $q$  должна быть формой расщепимой квадратичной формы  $q_0$ . При этом  $E = \text{Isom}(q_0, q)$ .

$O(q_0)$  действует на квадрике  $Q_0 := \{q_0 = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{2n-1}$ .

После подкрутки:  ${}_E Q_0 = \{q = 0\}$  и на  ${}_E Q_0$  действует группа  $O(q) = {}_E O(q_0)$ .



## 1.10 Многообразие Севери–Брауэра

**Пример 1.10.1.** Рассмотрим  $H^1(F, \mathrm{PGL}_n)$ .

Торсор  $E \in h^1(F, \mathrm{PGL}_n)$  задается центральной простой алгеброй  $A$  степени  $n$ :  $E = \mathrm{Isom}_{F\text{-}\mathcal{A}lg}(M_n, A)$ . Напомним, что  $\mathrm{PGL}_n = \mathrm{Aut}(M_n)$ .

Каждому вектору  $v \in \mathbb{A}^n - \{0\}$  соответствует правый идеал  $\{x \mid \mathrm{im} x \leq \langle v \rangle\}$  в  $M_n$ . Множество всех идеалов, получающихся таким образом — это в точности множество правых идеалов размерности  $n$ .

${}_E\mathbb{P}^{n-1}$  — Множество правых идеалов размерности  $n$  в  $A$  — **многообразие Севери–Брауэра**  $\mathrm{SB}(A)$ .

Уравнения:

$$\mathrm{SB}(A) := \{W \subset A \mid W \cdot A \subseteq A\}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{SB}(A) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(n, A) = \mathrm{Gr}(n, n^2).$$

$$\begin{array}{ccc} A \times \mathrm{SB}(A) & & A \times \mathrm{Gr}(n, n^2) \\ \uparrow \tau|_{\mathrm{SB}(A)} & & \uparrow \tau_n \\ \mathrm{SB}(A) & \hookrightarrow & \mathrm{Gr}(n, n^2) \end{array} \quad \begin{array}{c} W \\ \downarrow \\ \{w\} \end{array}$$

**Лемма 1.10.2.**  $\mathrm{End}_{\mathrm{SB}(A)}(J_A) \simeq A$  (эндоморфизмы расслоения).

Поэтому два описания  $H^1(F, \mathrm{PGL}_n)$  — как алгебры Адзумаи и как формы  $\mathbb{P}^{n-1}$  — эквивалентны.

**Утверждение 1.10.3.** Подрасслоение  $\tau|_{\mathrm{SB}(A)}$  выдерживает правое  $A$ -действие на  $A \times \mathrm{SB}(A)$ .

$$J_A := \tau|_{\mathrm{SB}(A)}.$$

**Пример 1.10.4.**  $\mathrm{Gr}(K, n)$  (линейные  $k$ -мерные подпространства в  $\mathbb{A}^n$ ).

Если  $U$  —  $k$ -мерное подпространство в  $\mathbb{A}^n$ , то  $\{x \mid \mathrm{im} x \subseteq U\}$  — правый идеал в  $M_n$  размерности  $kn$ .

$\mathrm{SB}_k(A)$  — обобщенное многообразие Севери–Брауэра — многообразие правых идеалов размерности  $k$ .

$\mathrm{Gr}(k, n) \simeq \mathrm{Gr}(n-k, n)$  (напомним, что это не канонический изоморфизм). Аналог этой двойственности:  $\mathrm{SB}_k(A) \simeq \mathrm{SB}_{n-k}(A^{op})$ .

**Утверждение 1.10.5.**  $\mathrm{SB}(A)(F) \neq \emptyset \Rightarrow A \simeq M_n$ .

$$\mathrm{SB}_k(A)(F) \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{ind} A \mid k.$$

(Напомним, что такое  $\mathrm{ind}$ . Для центральной простой алгебры  $A$  имеем  $A \simeq M_m(D)$ , где  $D$  — тело.  $m \cdot \deg D = n$ .  $\deg D =: \mathrm{ind} A$ , где  $\deg D := \sqrt{\dim D}$ .)

Скрученные формы  $\mathbb{P}^{n-1}$  — это скрученные формы  $M_n$ . Имеем  $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{n-1}) = \mathrm{PGL}_n$ .

Предположим  $\mathrm{char} F \neq 2$ .

$$\mathrm{Aut}(q_0) = O(q_0).$$

$$\mathrm{Aut}(Q_0)^+ = \mathrm{PGO}(q_0), \text{ где } Q_0 \text{ — квадратика } \{q = 0\}.$$

$H^1(F, \mathrm{PGO}(q_0))$  — классы  $(A, \sigma)$  изоморфности центральных простых алгебр  $A$  с ортогональной инволюцией  $\sigma$ .

$$\{\text{правые идеалы } I \text{ в } (A, \sigma) \text{ размерности } \deg A \mid \sigma(I) \cdot I = 0\} =: X_{(A, \sigma)} \hookrightarrow \mathrm{SB}(A).$$

При поднятии до  $\bar{F}$  получаем:

$$Q_{\sigma(q_{\bar{F}})} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{F}}^{\deg A - 1} = \mathrm{SB}(A) \otimes_F \bar{F}.$$

Вложение  $X_{(A, \sigma)} \hookrightarrow \mathrm{SB}(A)$  есть аналог вложения квадратика в проективное пространство.

## 2 Проективные однородные многообразия

### 2.1 Первые примеры

Еще раз про аналогию с топологией:

$E \rightarrow X$  — торсор на топологическом пространстве  $X$ ,  $G$  действует на  $E$ . Существует покрытие  $\{U_i\}$  пространства  $X$  такое, что

$$\begin{array}{ccc} U_i \times G \simeq E|_{U_i} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \\ U_i & \hookrightarrow & X \end{array}$$

У нас: возьмем  $X = \operatorname{Spec} K$ . Пусть  $E \rightarrow \operatorname{Spec} K$  — торсор. Существует расширение полей  $L/K$  такое, что торсор  $E_L \rightarrow \operatorname{Spec} L$  изоморфен торсору  $G_L \rightarrow \operatorname{Spec} L$ .

Мы хотим описать  $H^1(K, G)$ . Стратегия: для торсора  $E$  и (гладкого проективного)  $G$ -многообразия  $X$  мы определили  ${}_E X$  —  ${}_E G$ -многообразие (снова гладкое проективное), которое называется *скрученной формой*  $X$ , то есть,

- $E_{\overline{K}} \simeq G_{\overline{K}}$  как  $G_{\overline{K}}$ -многообразие,
- $({}_E G)_{\overline{K}} \simeq G_{\overline{K}}$  как алгебраическая группа,
- $({}_E X)_{\overline{K}} \simeq X_{\overline{K}}$  как  $G_{\overline{K}}$ -многообразие.

**Пример 2.1.1.** Пусть  $A \in H^1(K, \operatorname{PGL}_n)$ ; то есть,  $A$  — центральная простая алгебра степени  $n$ . Положим  $E = \operatorname{Isom}(M_n, A)$ ,  $X = \mathbb{P}^{n-1}$ ,  $G = \operatorname{PGL}_n$ . Тогда  ${}_E G = \operatorname{Aut}(A)$ ,  ${}_E X = \operatorname{SB}(A)$  — многообразие правых идеалов в  $A$  размерности  $n$ . Заметим, что  $\operatorname{SB}(A)(K)$  непусто тогда и только тогда, когда  $A \simeq M_n$ . Вообще, свойства многообразия  $\operatorname{SB}(A)$  отражают свойства исходного торсора.

**Пример 2.1.2.** Пусть  $G = \operatorname{O}_n$ ,  $q \in H_1(K, \operatorname{O}_n)$  — невырожденная квадратичная форма ранга  $n$ .

$E = \operatorname{Isom}(q_0, q)$ , где  $q_0$  расщепима (то есть, имеет вид  $\langle 1, -1 \rangle \perp \dots \perp \langle 1, -1 \rangle$  плюс, возможно, слагаемое  $\langle 1 \rangle$ ).

$X = \{q_0 = 0\}$  в проективном смысле. Тогда  $Q = {}_E X = \{q = 0\}$ . Заметим, что  $Q(K)$  непусто тогда и только тогда, когда форма  $q$  изотропна, то есть,  $q \simeq \langle 1, -1 \rangle \perp q'$ . Этот факт остается верным при любом расширении  $L/K$ :  $Q(L)$  непусто тогда и только тогда, когда форма  $q_L$  изотропна.

**Факт 2.1.3.** Пусть  $q$  имеет вид  $\langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_k \rangle$ . Тогда

Форма  $q_L$  изотропна тогда и только тогда, когда она расщепима (то есть,

$$\text{раскладывается в сумму форм вида } \langle 1, -1 \rangle). \quad (*)$$

Наоборот, если  $\dim q$  четна и  $(*)$  выполнено для любого расширения полей, то  $q$  пфистерова с точностью до скаляра. Если же  $\dim q$  нечетна, то  $q \perp \langle 1 \rangle$  пфистерова с точностью до скаляра.

Таким образом, от торсора  $E$  можно переходить к многообразию  ${}_E X$  (и можно варьировать  $X$ ), смотреть на его инварианты (в смысле алгебраической геометрии) и получать отсюда информацию об инвариантах торсора.

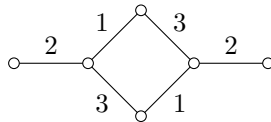
Пусть  $X$  — гладкое проективное многообразие. Мы ограничимся случаем, когда  $X$  *однородное*, то есть,  $G(\overline{K})$  действует на  $X(\overline{K})$  транзитивно (заметим, что это означает, что отображение  $G \times X \rightarrow X \times X$ ,  $(g, x) \mapsto (gx, x)$  сюръективно как пучок, а не в категорном смысле; категорное понятие эпиморфизма не подходит для наших целей: например, отображение  $\operatorname{Spec} \mathbb{Q} \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$  сюръективно в категории схем). Неформально говоря, у  $G$  на  $X$  одна орбита. Тогда  $X$  называется **проективным однородным многообразием**.

Как строить проективные однородные многообразия? Пусть  $G$  — расщепимая группа,  $V$  — неприводимое представление (в положительной характеристике нужно действовать осторожно). Рассмотрим  $\mathbb{P}(V)$  — многообразие прямых в  $V$ , проходящих через 0. У группы  $G$  есть ровно одна замкнутая орбита на  $\mathbb{P}(V)$  — это и есть наше  $X$ . На самом деле, все проективные однородные многообразия так получаются (но не обязательно единственным образом).

**Пример 2.1.4.**  $G = \mathrm{SL}_n$  действует на  $V = K^n$  (имеется в виду обычное, *векторное* представление). Пусть  $u, v$  — два вектора. Можно ли найти  $g$  такое, что  $\langle gu \rangle = \langle v \rangle$  (здесь через  $\langle x \rangle$  мы обозначаем прямую, натянутую на  $x$ )? Ответ — можно, если  $u$  и  $v$  отличны от 0. Значит, в  $K^n$  есть две орбиты действия группы  $G$ :  $\{0\}$  и  $\{v \mid v \neq 0\}$ . После проективизации в  $\mathbb{P}(K^n) = \mathbb{P}^{n-1}$  остается только одна орбита.

**Пример 2.1.5.**  $G = \mathrm{SL}_n$  действует на  $V = \Lambda^k(K^n)$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . На неразложимых поливекторных орбитах много, но на разложимых действие транзитивно. Свойство «быть разложимым» определяется уравнениями Плюккера. Орбита в  $\mathbb{P}(\Lambda^k(K^n))$  — это  $\mathrm{Gr}(k, n)$ .

Пусть, к примеру,  $n = 4$ ,  $k = 2$ . Диаграмма Хассе весов нашего представления выглядит так:



Разложимый тензор задается двумя векторами. Запишем их в базисе  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ :  $(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) \wedge (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4)$ . Обозначим координату тензора  $x$  при бивекторе  $e_i \wedge e_j$  через  $x_{ij}$ . Тогда разложимость  $x$  равносильно обращению в 0 выражения  $x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}$ . Это следует, например, из соотношения на миноры матрицы  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ .

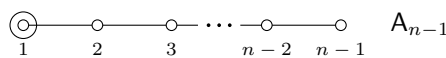
## 2.2 Параболические подгруппы

Оказывается, любое  $X$ , являющееся орбитой в  $\mathbb{P}(V)$ , задается квадратичными уравнениями в проективных координатах.

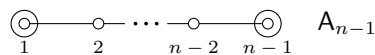
Пусть  $v \in V$ ,  $X = G \cdot \langle v \rangle$  — орбита вектора  $v$ . Тогда  $\mathrm{Stab}_G(\langle v \rangle) = P$  — параболическая подгруппа в  $G$ . Проективное однородное многообразие задается подгруппой  $P$  с точностью до сопряженности.

Посмотрим, как тор  $T$  в  $G$  действует на вектор  $v$ . Из равенства  $T\langle v \rangle = \langle v \rangle$  следует, что найдется  $\lambda: T \rightarrow \mathbb{G}_m$  (**вес** неприводимого представления  $V$ ) такое, что  $tv = \lambda(t)v$  для всех  $t \in T$ . Представление задается своим старшим весом (точнее, орбитой веса относительно  $W$ , но в этой орбите есть единственный доминантный вес). Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  — простые корни. Рассмотрим базис  $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_l^\vee$  в двойственном пространстве, где  $\alpha_i^\vee$  определяется равенством  $\alpha_i^\vee(\beta) = \frac{2(\alpha_i, \beta)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ . Пусть  $\varpi_1, \dots, \varpi_l$  — двойственный к нему базис. Таким образом,  $\frac{2(\alpha_i, \varpi_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \delta_{ij}$ . Эти элементы  $\varpi_1, \dots, \varpi_l$  называются **фундаментальными весами**. Вес  $\lambda$  раскладывается по этому базису следующим образом:  $\lambda = \sum m_i \varpi_i$ . После этого  $X$  (и  $P$ ) зависит только от того, какие из  $m_i$  не равны 0. То есть, проективные однородные многообразия задаются подмножеством вершин на диаграмме Дынкина, состоящим из тех вершин, для которых  $m_i \neq 0$ . Мы будем их обводить на картинке.

Например, картинка для проективного пространства такая:



Это соответствует векторному представлению  $V = V(\varpi_1)$  группы  $\mathrm{SL}_n$ . Вообще, если на диаграмме  $A_{n-1}$  обвести вершину с номером  $k$ , получится  $\mathrm{Gr}(k, n)$ . Есть еще, например, присоединенное представление:  $\mathrm{SL}_n$  действует на своей алгебре Ли  $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n)$ . Картинка для этого представления такая:



Первая вершина соответствует  $V$ , последняя —  $V^*$ , в итоге получаем  $V^* \otimes V \simeq \mathrm{End}(V)$ .

Если обведена одна вершина ( $V = V(\varpi_i)$ ), то  $P$  называется **максимальной** параболической. Если все вершины обведены, то  $P$  называется **борелевской** (это минимальная среди параболических). Любая гладкая замкнутая подгруппа, содержащая  $B$ , называется **параболической** и получается таким образом:  $B \leq P \leq G$ .

Пусть теперь на диаграмме Дынкина системы  $A_{n-1}$  обведены вершины с номерами  $k_1, \dots, k_m$ . Полученное многообразие можно описать в терминах стандартного представления  $V = K^n$  группы

$\mathrm{SL}_n$ . А именно,

$$X = \{U_1 \leq \dots \leq U_m \mid \dim U_i = k_i\}.$$

Такое  $X$  называется **многообразием флагов**. При этом  $\mathrm{SL}_n$  действует на  $X$  транзитивно. Заметим, что тензорное произведение  $V(\varpi_{k_1}) \otimes \dots \otimes V(\varpi_{k_m})$  уже не обязано быть неприводимым, но можно взять кусок, соответствующий весу  $\varpi_{k_1} + \dots + \varpi_{k_m}$ .

Так мы описали все однородные проективные многообразия для группы  $\mathrm{SL}_n$ . В общем случае (для произвольной  $G$ ) иногда однородное проективное многообразие называют **обобщенным флаговым многообразием**. Его можно описать так:

$$X = \{P' \leq G \mid P' \text{ сопряжена с } P\},$$

где значок  $P' \leq G$  означает, что  $P'$  — гладкая замкнутая подгруппа в  $G$ . Более точно,

$$X(R) = \{P' \leq G_R \mid \text{существуют } S/R, g \in G(S) : gP'g^{-1} = P\}.$$

После подкрутки на торсор  $E$  получаем

$${}_E X = \{P' \leq {}_E G \mid P'_K \text{ сопряжена с } P_K \text{ внутри } ({}_E G)_K = G_K\}.$$

Обратите внимание, что в  ${}_E G$  никакой  $P$  может не оказаться.

Проективное однородное многообразие  $X$  **изотропно**, если  $X(K) \neq \emptyset$ . Сама группа  ${}_E G$  называется **изотропной**, если для какого-то проективного однородного многообразия  ${}_E X$ , отличного от точки,  ${}_E X$  изотропно.

**Пример 2.2.1.** Пусть  $G = \mathrm{PGL}_n$ . Ее скрученная форма  ${}_E G$  имеет вид  $\mathrm{Aut}(A)$ , а соответствующая скрученная форма проективного пространства —  $\mathrm{SB}(A)$ . Заметим, что у  $\mathrm{PGL}_n$  (в отличие от  $\mathrm{SL}_n$ ) нет векторного представления. Почему? Для начала поймем, откуда берется скрученная форма  $\mathrm{SL}_n$ . Отображение определителя  $\det: \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathbb{G}_m$  скручивается в *приведенную норму* (*reduced norm*)

$$\mathrm{Nrd}: A^* = \mathrm{GL}_1(A) \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

Ядро этого отображения обозначается через  $\mathrm{SL}_1(A) = \{g \in A \mid \mathrm{Nrd}(g) = 1\}$ . Например,  $(\mathrm{Nrd}(x))^n = \det(y \mapsto xy)$ .

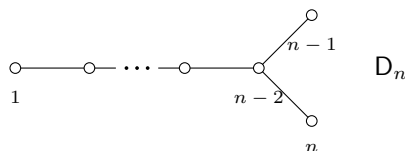
Решетка корней содержится в решетке весов:

$$\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_l \leq \mathbb{Z}\varpi \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\varpi_l$$

Диаграммы Дынкина классифицируют расщепимые полупростые группы с точностью до изогении, а класс изоморфности внутри класса изогении задается промежуточной решеткой между этими двумя (с точностью до внешних автоморфизмов). Минимальная решетка  $\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_l$  соответствует присоединенной группе (без центра); максимальная решетка  $\mathbb{Z}\varpi_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\varpi_l$  соответствует односвязной группе (у нее самый большой центр).

## 2.3 $\mathrm{SO}_{2n}$

Посмотрим на однородные многообразия для  $\mathrm{SO}_{2n}$ . Диаграмма Дынкина выглядит так:



Весу  $\varpi_1$  отвечает квадратика  $\{q(v) = 0\}$ , что соответствует естественному представлению  $V$  группы  $\mathrm{SO}_{2n}$ . Весу  $\varpi_2$  — представление  $\Lambda^2 V$ . Соответствующее многообразие — множество вполне изотропных плоскостей  $\langle u, v \rangle$ , то есть, таких, что  $q|_{\langle u, v \rangle} = 0$ . Это условие можно описать так:  $q(u) = q(v) = f(u, v) = 0$ , где  $f$  — поляризация формы  $q$ :  $f(u, v) = q(u + v) - q(u) - q(v)$ . Аналогично (с помощью вполне изотропных подпространств различной размерности) описываются случаи  $\varpi_3, \dots, \varpi_{n-2}$ .

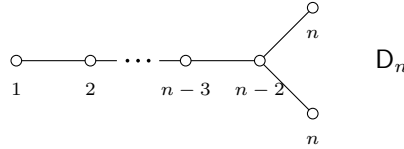
Весам  $\varpi_{n-1}$  и  $\varpi_n$  соответствуют вполне изотропные подпространства размерности  $n$ . Дело в том, что многообразие вполне изотропных подпространств размерности  $n$  имеет две компоненты связности. Для того, чтобы объяснить этот эффект, выберем базис  $e_1, \dots, e_n, e_{-n}, \dots, e_{-1}$ , относительно которого матрица Грама формы  $q$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оказывается, подпространства  $\langle e_1, \dots, e_{n-1}, e_n \rangle$  и  $\langle e_1, \dots, e_{n-1}, e_{-n} \rangle$  вполне изотропны, но не переводятся друг в друга действием  $\mathrm{SO}_{2n}$ . Первое соответствует весу  $\varpi_{n-1}$ , а второе — весу  $\varpi_n$ . Куда же делось многообразие вполне изотропных подпространств размерности  $n-1$ ? Оно не максимальное однородное (соответствует не максимальной параболической подгруппе), и соответствует весу  $\varpi_{n-1} + \varpi_n$ . Действительно,

$$\mathrm{Stab}(\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle) = \mathrm{Stab}(\langle e_1, \dots, e_{n-1}, e_n \rangle) \cap \mathrm{Stab}(\langle e_1, \dots, e_{n-1}, e_{-n} \rangle).$$

Вообще, не максимальные многообразия соответствуют флагам. Посмотрим на вес  $\varpi_{i_1} + \dots + \varpi_{i_k}$ . Флаг для него — это набор подпространств таких размерностей:



с правильной инцидентностью. А именно, для каждой из двух цепочек от первой вершины до двух последних инцидентность — это включение, а для весов  $\varpi_{n-1}$  и  $\varpi_n$  инцидентность означает, что пересечение соответствующих подпространств размерности  $n$  имеет размерность  $n-1$ .

Перед нами пример *геометрии*. Гораздо более простой пример — случай системы  $A_2$ . Там всего два фундаментальных веса:  $\varpi_1$  соответствует точкам (и параболическим подгруппам типа  $\varpi_1$ ), а  $\varpi_2$  — прямым (и параболическим подгруппам типа  $\varpi_2$ ). Более подробно, посмотрим на трехмерное векторное пространство  $F^3$ . Ненулевой вектор  $u$  порождает одномерное подпространство  $\langle u \rangle \subseteq F^3$ , и его стабилизатор  $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_3}(\langle u \rangle)$  — это параболическая подгруппа типа  $\varpi_1$ :

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \text{ — стабилизатор вектора } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для описания прямых можно воспользоваться двойственностью и перейти к пространству  $(F^3)^*$ . Ненулевой ковектор  $\varphi \in (F^3)^*$  порождает одномерное подпространство  $\langle \varphi \rangle \subseteq (F^3)^*$ , и его стабилизатор  $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_3}(\langle \varphi \rangle)$  — это параболическая подгруппа типа  $\varpi_2$ :

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \text{ — стабилизатор ковектора } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отношение инцидентности между ними такое: точка лежит на прямой тогда и только тогда, когда  $\varphi(u) = 0$ . В терминах параболических подгрупп:  $\mathrm{Stab}(\langle u \rangle) \cap \mathrm{Stab}(\langle \varphi \rangle)$  содержит борелевскую подгруппу (то есть, параболическую подгруппу типа  $\varpi_1 + \varpi_2$ ).

Если мы теперь посмотрим на геометрию, заданную абстрактными аксиомами проективной плоскости (с аксиомой Дезарга, обеспечивающей ассоциативность, но без аксиомы Паппа, обеспечивающей коммутативность), мы получим группу  $\mathrm{SL}_1(A)$ , где  $A$  — центральная простая алгебра степени 3.

## 2.4 Вычисление колец Чжоу

Пусть  $E \in H^1(F, G)$ , и задано однородное проективное  $G$ -многообразие  $X$ . Рассмотрим скрученное многообразие  ${}_E X$ ; нас интересуют инварианты этого многообразия в смысле алгебраической геометрии. Например,  $\mathrm{CH}^*({}_E X)$ .

Вложение поля  $F$  в его алгебраическое замыкание  $\bar{F}$  дает морфизм схем  $\mathrm{Spec} \bar{F} \rightarrow \mathrm{Spec} F$ . Пулбэком получается многообразие  $X_{\bar{F}}$ :

$$\begin{array}{ccc} X_{\bar{F}} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} \bar{F} & \longrightarrow & \mathrm{Spec} F \end{array}$$

Отсюда получаем гомоморфизм

$$\mathrm{CH}^*({}_E X) \rightarrow \mathrm{CH}^*(({}_E X)_{\bar{F}}) = \mathrm{CH}^*(X_{\bar{F}}).$$

Нас интересует образ этого гомоморфизма: кручение содержится в его ядре, за счет чего легче жить. Первый шаг — вычисление  $\mathrm{CH}^*(X_{\bar{F}})$ .

## 2.5 Пример: проективное пространство

**Пример 2.5.1.** Рассмотрим  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$  с диагональным действием  $\mathrm{SL}_{n+1}$ . Это действие не транзитивно: есть диагональ  $\mathbb{P}^n$ . Как выглядит дополнение к диагонали? Мы утверждаем, что оно расслаивается над  $\mathrm{Gr}(1, 2; n+1)$  со слоем  $\mathbb{A}^1$ . Здесь  $\mathrm{Gr}(1, 2; n+1)$  — многообразие флагов, состоящих из прямой и плоскости, в  $(n+1)$ -мерном пространстве.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n & \longleftarrow & \mathbb{P}^n \\ & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & \mathrm{Gr}(1, 2; n+1) & \end{array}$$

Это расслоение выглядит так: пара  $(\langle u \rangle, \langle v \rangle) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$  отправляется во флаг  $\langle u \rangle \leq \langle u, v \rangle$ . Прообраз флага при этом — это многообразие способов дополнить прямую до плоскости, то есть,  $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^0 = \mathbb{A}^1$ . Более строго, нужно говорить про расслоения на  $\mathrm{Gr}(1, 2; n+1)$ : есть двумерное векторное расслоение  $\tau_2$ , сопоставляющее флагу  $\langle u \rangle \leq \langle u, v \rangle$  плоскость  $\langle u, v \rangle$ , и есть одномерное векторное расслоение  $\tau_1$ , сопоставляющее флагу  $\langle u \rangle \leq \langle u, v \rangle$  прямую  $\langle u \rangle$ .

Теперь зафиксируем в этом описании  $u$ , то есть, возьмем слой всей картинке над точкой в первом сомножителе  $\mathbb{P}^n$ . Получим картинку

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \longleftarrow & \mathrm{pt} \\ & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & \mathrm{Gr}(1; n) & \end{array}$$

Заметим, что  $\mathrm{Gr}(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}$ . Поэтому можно написать точную последовательность локализации:

$$\mathrm{CH}^{*-n}(\mathrm{pt}) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow 0.$$

Средняя стрелка является гомоморфизмом колец, а первый член почти всегда равен нулю. Поэтому

$$\mathrm{CH}^i(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathrm{CH}^i(\mathbb{P}^{n-1}), & i < n, \\ \mathbb{Z}, & i = n, \\ 0, & i > n. \end{cases}$$

По индукции получаем, что у  $\mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^n)$  в каждой размерности от 0 до  $n$  стоит одна копия  $\mathbb{Z}$ .

**Пример 2.5.2.** Опишем другой способ. Пусть  $\dim(V) = n + 1$ . Рассмотрим действие группы  $\mathrm{SL}(V)$  (или  $\mathrm{PGL}(V)$ ) на  $\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V)$  (соответствующее весу  $\varpi_1 + \varpi_n$ ). Там имеется подмногообразие  $\{\varphi(u) = 0\}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V) & \xleftarrow{\quad} & \{\varphi(u) = 0\} \\ & \downarrow \mathbb{A}^n & \\ & \mathbb{P}(V^*) & \end{array}$$

Зафиксировав  $\varphi$ , получаем

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{P}^{n-1} \\ & \downarrow \mathbb{A}^n & \\ & \mathrm{pt} & \end{array}$$

Значит, имеется следующая точная последовательность локализации:

$$\mathrm{CH}^{*-1}(\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathrm{pt}) \rightarrow 0.$$

Вычисление по индукции приводит к тому же результату, что и в предыдущем примере.

**Факт 2.5.3.** Если  $Z \subseteq X$  — замкнутое подмногообразие, и  $U = X \setminus Z$ , имеется точная последовательность локализации

$$\mathrm{CH}^{*-\mathrm{codim}_X Z} \rightarrow \mathrm{CH}^*(X) \rightarrow \mathrm{CH}^*(U) \rightarrow 0,$$

где первое отображение — push-forward, а второе — pull-back (и является гомоморфизмом колец).

**Пример 2.5.4.** Тот же результат можно получить и прямым вычислением: понять, что компонента кольца Чжоу коразмерности  $i$  порождается классом подпространства  $[\mathbb{P}^{n-i}]$ , причем  $[\mathbb{P}^n] = 1$ . Кроме этого,

$$[\mathbb{P}^{n-1}]^i = \begin{cases} [\mathbb{P}^{n-i}], & i \leq n, \\ 0, & i > n. \end{cases}$$

Например, выбрав на  $\mathbb{P}^n$  однородные координаты  $[x_0 : \dots : x_n]$ , можно взять  $\mathbb{P}^{n-1} = \{x_0 = 0\}$ , другое  $\mathbb{P}^{n-1} = \{x_1 = 0\}$  и обнаружить, что их пересечение равно  $\{x_0 = x_1 = 0\} = \mathbb{P}^{n-2}$ .

**Замечание 2.5.5.** По сути, в примере 2.5.2 мы нарисовали фильтрацию

$$\mathbb{P}^n \xleftarrow{\mathbb{A}^n} \mathbb{P}^{n-1} \xleftarrow{\mathbb{A}^{n-1}} \dots \xleftarrow{\mathbb{A}^1} \mathrm{pt}$$

Вообще, если у многообразия  $X$  существует фильтрация замкнутыми подмногообразиями  $S \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$  такая, что  $X_i \setminus X_{i+1} = \coprod \mathbb{A}^{k_i}$ , то  $X$  называется **клеточным**. В этом случае

- все  $\mathrm{CH}^i$  — свободные конечно порожденные абелевы группы (их ранг равен количеству клеток в соответствующей разности);
- $\mathrm{CH}(X)_i \simeq \mathrm{CH}(X_L)_i$  для любого расширения  $L/F$ .

## 2.6 Пример: многообразие Севери–Брауэра

Перейдем теперь к  $\mathrm{SB}(D)$ , где  $D$  — тело,  $\mathrm{ind} D = n + 1$ . Это скрученная форма  $\mathbb{P}^n$ :  $\mathrm{SB}(D) = {}_E \mathbb{P}^n$ . В разделе 2.4 мы построили отображение

$$\mathrm{CH}^*(\mathrm{SB}(D)) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathbb{P}_{\overline{F}}^n).$$

Циклы из его образа называются **рациональными** (по отношению к скручивающему торсору  $E$ ). В разделе 2.5 мы вычислили правую часть: там стоит копия  $\mathbb{Z}$  в каждой компоненте с номерами от 0 до  $n$ . Образующая компоненты коразмерности 0 всегда оказывается в образе.

Предположим, что класс  $[\mathrm{pt}]$  оказался рационален. Это означает, что есть конечные (сепарабельные) расширения  $L_1, \dots, L_k$  такие, что

- над каждым  $L_i$  наше многообразие имеет рациональную точку;
- $\gcd_i([L_i : F]) = 1$ .

Заметим, что первое условие равносильно тому, что  $[D_{L_i}] = 0$  в  $\text{Br}(L_i) = 0$ . Применим отображение трансфера  $\text{Br}(L_i) \rightarrow \text{Br}(F)$ . Получим, что  $[L_i : F] \cdot [D] = 0$  в  $\text{Br}(F)$  для всех  $i$ . Из этого (а также из второго условия) следует, что  $[D] = 0$  в  $\text{Br}(F)$ .

## 2.7 Пример: квадрака

Рассмотрим квадраку  $Q = \{q = 0\}$ . В  $Q \times Q = \{(\langle u \rangle, \langle v \rangle)\}$  есть подмножество  $\{f(u, v) = 0\}$ , а в нем — диагональ  $\{\langle u \rangle = \langle v \rangle\} \simeq Q$ . Получаем фильтрацию

$$\begin{array}{ccccc} Q \times Q & \xleftarrow{\quad} & \{f(u, v) = 0\} & \xleftarrow{\quad} & Q. \\ & \downarrow \mathbb{A}^{\dim Q} & & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & Q & & \text{OGr}(1, 2; f) & \end{array}$$

Здесь  $\text{OGr}(1, 2; f)$  означает многообразие флагов, состоящих из вполне изотропных подпространств вида  $\langle u \rangle \leq \langle u, v \rangle$ .

Расслоение  $Q \times Q \setminus \{f(u, v) = 0\} \rightarrow Q$  устроено так: пара  $(\langle u \rangle, \langle v \rangle)$  отправляется в  $\langle u \rangle$ . Проверим, что слой изоморфен  $\mathbb{A}^{\dim Q}$ . Пусть  $u = e_1$ . Тогда наше дополнение имеет вид  $\{f(e_1, v) \neq 0\}$ . Условие  $f(e_1, v) \neq 0$  равносильно тому, что коэффициент у  $v$  при базисном векторе  $e_{-1}$  не равен 0. Поэтому можно читать, что он равен 1. Теперь все коэффициенты  $v$ , кроме тех, что стоят при  $e_1$  и  $e_{-1}$ , можно брать какими угодно, а коэффициент при  $e_1$  определяется однозначно из условия изотропности  $q(v) = 0$ . Иначе говоря, если  $\tau$  — тавтологическое расслоение на  $Q$ , рассмотрим  $(\tau^\perp)^*$ . Его слой над точкой  $\langle u \rangle \in Q$  равен  $(\langle u \rangle^\perp)^*$ . Вот нужный нам изоморфизм:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{\dim Q} &\rightarrow \mathbb{P}((\langle u \rangle^\perp)^*) \setminus \mathbb{P}(\{\varphi \in (\langle u \rangle^\perp)^* \mid \varphi(u) = 0\}), \\ v &\mapsto (\varphi: w \mapsto f(v, w)). \end{aligned}$$

Расслоение  $\{f(u, v) = 0\} \setminus Q \rightarrow \text{OGr}(1, 2; f)$  устроено проще: его слой равен  $\mathbb{P}(\tau_2) \setminus \mathbb{P}(\tau_1) \simeq \mathbb{A}^1$ , как и в примере 2.5.1.

Теперь зафиксируем  $u$ ; получим фильтрацию

$$\begin{array}{ccccc} Q & \xleftarrow{\quad} & \{f(u, v) = 0\} & \xleftarrow{\quad} & \text{pt}, \\ & \downarrow \mathbb{A}^{\dim Q} & & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & \text{pt} & & Q' & \end{array}$$

где  $Q'$  — квадрака размерности  $\dim Q - 2$ . Получаем точные последовательности

$$\begin{aligned} \text{CH}^{*-1}(\{f(u, v) = 0\}) &\rightarrow \text{CH}^*(Q) \rightarrow \text{CH}^*(\text{pt}) \rightarrow 0, \\ \text{CH}^{*-\dim Q+1}(\text{pt}) &\rightarrow \text{CH}^*(\{f(u, v) = 0\}) \rightarrow \text{CH}^*(Q') \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теперь при помощи индукции можно доказать следующее.

Пусть  $\dim Q = n$  чётно. Тогда  $\text{CH}^i(Q)$  — свободная абелева группа ранга 1 для всех  $i = 0, \dots, n$ , кроме  $i = n/2$ ;  $\text{CH}^{n/2}(Q) \simeq \mathbb{Z}^2$ . Обозначим за  $h = [Q''] \in \text{CH}^1(Q)$  класс подквадрики коразмерности 1. Это гиперплоское сечение  $Q$  в общем положении. Тогда 1 — образующая  $\text{CH}^0(Q)$ ,  $h$  — образующая  $\text{CH}^1(Q)$ ,  $h^2$  — образующая  $\text{CH}^2(Q)$ ,  $\dots$ . С другой стороны,  $\text{pt}$  — образующая  $\text{CH}^n(Q)$ ,  $[\mathbb{P}^1]$  — образующая  $\text{CH}^{n-1}(Q)$ ,  $[\mathbb{P}^2]$  — образующая  $\text{CH}^{n-2}(Q)$ ,  $\dots$ . Это классы изотропных подпространств соответствующих размерностей. Наконец,  $h^{n/2}$  является суммой двух образующих; в качестве одной из них можно взять  $[\mathbb{P}^{n/2}]$ .

Это можно увидеть в координатной записи:  $Q$  задается уравнением  $x_1 y_1 + \dots + x_{n/2+1} y_{n/2+1} = 0$ . После этого  $Q''$  задается уравнением  $x_{n/2+1} - y_{n/2+1} = 0$  (это гиперплоское сечение, как и было обещано), а следующие образующие задаются последовательным наложением уравнений  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ , и так далее. Когда дойдем до коразмерности  $n/2$ , получим два варианта: либо

$$x_1 = \dots = x_{n/2+1} = 0,$$



либо

$$x_1 = \dots = x_{n/2} = y_{n/2+1} = 0.$$

**Пример 2.7.1.** Пусть  $n = 4$ , то есть, мы имеем дело с  $D_3$ . Перед нами четырехмерная квадрика. Ее уравнение выглядит так:  $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$ . Уравнения двух образующих в коразмерности  $4/2 = 2$  выглядят так:

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = x_3 = 0, \\ x_1 = x_2 = y_3 = 0. \end{aligned}$$

Их пересечение имеет вид  $x_1 = x_2 = x_3y_3 = 0$ , что равносильно  $x_1 = x_2 = 0$ . Почему-то это условие равносильно  $x_3 = y_3 = 0$ .

## 2.8 Нерасщепимая квадрика

Что произойдет, если взять нерасщепимую квадрику? Возьмем торсор  $E \in H^1(F, O_{2n+2})$  и построим  ${}_E Q$ . Как вычислить  $\mathrm{CH}^*({}_E Q)$ ? Более простой вопрос: рассмотрим отображение

$$\mathrm{CH}^*({}_E Q) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{CH}^*(({}_E Q)_{\overline{F}}).$$

Что можно сказать про образ этого отображения (то есть, про рациональные циклы)? Продолжим считать для простоты, что  $n$  четно. Мы знаем, что стоит в правой части: образующие  $1, h, h^2, \dots$  в коразмерностях  $0, 1, 2, \dots$ , до середины, образующие  $[\mathrm{pt}], [\mathbb{P}^1], [\mathbb{P}^2], \dots$  в коразмерностях  $n, n-1, n-2, \dots$  до середины, и две образующие  $[\Pi_1], [\Pi_2]$  в коразмерности  $n/2$ . При этом  $h^{n/2} = [\Pi_1] + [\Pi_2]$ . Умножение выглядит так:  $h \cdot [\mathbb{P}^i] = [\mathbb{P}^{i-1}]$ ,  $h \cdot [\Pi_1] = h \cdot [\Pi_2] = [\mathbb{P}^{n/2}]$ .

Во всяком случае,  $h$  рационален: можно взять любую гладкую подквадрику коразмерности 1. Пусть  ${}_E Q$  задается уравнением  $q = 0$ . В случае расщепимой [четномерной] квадрики это было уравнение  $x_1y_1 + \dots + x_{n/2+1}y_{n/2+1} = 0$ , и подквадрика выделялась дополнительным условием  $x_{n/2+1} - y_{n/2+1} = 0$ . В общем случае можно взять любой  $v$  такой, что  $q(v) \neq 0$ , и  $q|_{\langle v \rangle^\perp}$  задает гладкую подквадрику коразмерности 1.

**Теорема 2.8.1** (Springer). *Предположим, что  $q$  анизотропна, то есть,  $q(v) \neq 0$  при  $v \neq 0$ . Тогда класс  $[\mathrm{pt}]$  не рационален.*

Теорема доказывается так: класс  $[\mathrm{pt}]$  рационален тогда и только тогда, когда найдутся расширения  $E_i/F$  такие, что  $\mathrm{gcd}([E_i : F]) = 1$ , и над каждым  $E_i$  квадрика  $q_{E_i}$  изотропна. В частности, среди степеней расширений должна быть хотя бы одна нечетная, и потому для некоторого  $E/F$  с нечетным  $[E : F]$  квадрика  $q_E$  изотропна. Но из этого следует, что  $q$  изотропна (это, собственно, и есть классическая теорема Спрингера).

Вот ответ на вопрос про образ: если  $Q$  анизотропна, то

$$\mathrm{im}(\mathrm{CH}^k({}_E Q) \rightarrow \mathrm{CH}^k(({}_E Q)_{\overline{F}})) = \begin{cases} \mathrm{CH}^k(({}_E Q)_{\overline{F}}), & k < n/2, \\ 2 \cdot \mathrm{CH}^k(({}_E Q)_{\overline{F}}), & k > n/2, \\ 2 \cdot \mathbb{Z}[\Pi_1] + \mathbb{Z}([\Pi_1] - [\Pi_2]), & k = n/2 \end{cases}$$

Если  $q$  изотропна, то есть существует ненулевой вектор  $v$  такой, что  $q(v) = 0$ , то можно выделить гиперболическую плоскость:  $q = \langle 1, -1 \rangle \perp q'$ . Проитерлируем этот процесс: получим

$$q = k \cdot \langle 1, -1 \rangle \perp q_{\mathrm{an}},$$

где  $q_{\mathrm{an}}$  и  $k$  определены однозначно ( $q_{\mathrm{an}}$  — с точностью до изометрии). При этом  $k$  называется **индексом Витта** формы  $q$ , а  $q_{\mathrm{an}}$  — ее **анизотропной частью**.

Так вот, если индекс Витта нашей формы  $q$  равен  $k$ , то циклы  $[\mathrm{pt}], [\mathbb{P}^1], \dots, [\mathbb{P}^{k-1}]$  рациональны. Обратное тоже верно: если эти циклы рациональны, то индекс Витта не меньше  $k$ .

Резюме: рациональные циклы на самой квадрике контролируют только ее индекс Витта.

Посмотрим теперь на другое многообразие, связанное с торсором  $E \in H^1(F, O_{2n+2})$  (мы для удобства изменим нумерацию). А именно, рассмотрим  $\mathrm{OGr}(2, Q)$  — многообразие вполне изотропных

плоскостей. Мы реализовали  $Q$  как  $\{\langle v \rangle \mid q(v) = 0\}$ . Тогда  $\text{OGr}(2, Q) = \{\langle u, v \rangle \mid q(u) = q(v) = f(u, v) = 0\}$ .

Чтобы добраться до этого многообразия, положим  $X = \{f(u, v) = 0\}$  и рассмотрим фильтрацию из раздела 2.7:

$$\begin{array}{ccccc} Q \times Q & \xleftarrow{\quad} & \{f(u, v) = 0\} & \xleftarrow{\quad} & \text{pt}, \\ & \downarrow \mathbb{A}^n & & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & Q & & \text{OGr}(1, 2; Q). & \end{array}$$

С одной стороны,  $\text{OGr}(1, 2; Q)$  — расслоение над  $\text{OGr}(2; Q)$  со слоем  $\mathbb{P}^1$ . С другой стороны, написанная фильтрация позволяет нам написать разложение

$$\text{CH}^*(Q \times Q) = \text{CH}^{*-n}(Q) \oplus \text{CH}^{*-n+1}(\text{OGr}(1, 2; Q)) \oplus \text{CH}^*(Q).$$

Более того, морфизмы в левую часть из слагаемых в правой части задаются явным образом (с помощью пулбэков и пушфорвардов), и они  $O(q)$ -эквивариантны.

### 3 Мотивы Чжоу

#### 3.1 Категория соответствий

До сих пор мы смотрели на  $\text{CH}^*$  и на морфизмы вида  $\text{CH}^*(X) \rightarrow \text{CH}^*(\bar{X})$ . Посмотрим теперь на **мотив Чжоу** многообразия  $X$ .

Начнем с категории гладких проективных многообразий над  $F$ . Что в ней плохо? Например, то, что морфизмы нельзя складывать: она не аддитивна (и тем более не абелева). Каждому морфизму  $f: X \rightarrow Y$  можно сопоставить его график  $\Gamma_f \subseteq X \times Y$  и получить  $[\Gamma_f] \in \text{CH}^*(X \times Y)$ . Элементы  $\text{CH}^*(X \times Y)$  уже можно складывать! Поэтому в качестве промежуточного шага можно рассмотреть **категорию соответствий**  $\text{Cor}_F$ . Ее объекты — гладкие проективные многообразия над  $F$ . Морфизмы:  $\text{Mor}(X, Y) = \text{CH}^{\dim Y}(X \times Y)$ . Роль тождественного морфизма играет класс диагонали.

**Замечание 3.1.1.** В этой конструкции можно заменить  $\text{CH}$  на что-то другое, где есть пулбэки и пушфорварды (они понадобятся нам ниже), например, на другую теорию когомологий. Если взять  $K$ -теорию — получим  $K$ -мотивы, а не мотивы Чжоу.

Как определить композицию таких морфизмов? Пусть  $\alpha \in \text{CH}^{\dim Y}(X \times Y)$ ,  $\beta \in \text{CH}^{\dim Z}(Y \times Z)$ . Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X \times Y \times Z & & \\ & \swarrow \text{pr}_{XY} & \downarrow \text{pr}_{XZ} & \searrow \text{pr}_{YZ} & \\ X \times Y & & X \times Z & & Y \times Z \end{array}$$

Из нее получается следующая диаграмма на уровне Чжоу:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{CH}^*(X \times Y \times Z) & & \\ & \swarrow \text{pr}_{XY}^* & \downarrow (\text{pr}_{XZ})_* & \nwarrow \text{pr}_{YZ}^* & \\ \text{CH}^{\dim Y}(X \times Y) & & \text{CH}^*(X \times Z) & & \text{CH}^{\dim Z}(Y \times Z) \end{array}$$

Поэтому  $\text{pr}_{XY}^*(\alpha) \cdot \text{pr}_{YZ}^*(\beta) \in \text{CH}^{\dim Y + \dim Z}(X \times Y \times Z)$ , и мы можем определить

$$\beta \circ \alpha = (\text{pr}_{XZ})_*(\text{pr}_{XY}^*(\alpha) \cdot \text{pr}_{YZ}^*(\beta))$$

Это произведение имеет характер свертки. Например, можно взять в качестве  $X, Y, Z$  метрические пространства, а в качестве морфизмов — ядерные операторы, и получится свертка. Или в качестве  $X, Y, Z$  — конечные множества, а в качестве морфизмов — матрицы, и тогда получится произведение матриц.

### 3.2 Карубизация

Итак, в категории соответствий  $\text{Cor}_F$  морфизмы уже можно складывать: это аддитивная категория. Заметим, что в ней есть и прямые суммы ( $X \oplus Y = X \coprod Y$ ), и произведения ( $X \otimes Y = X \times Y$ ). Но эта категория не абелева (и даже не псевдоабелева). Напомним, что категория называется **псевдоабелевой**, если у любого проектора есть образ (в категорном смысле). То есть, если  $p: X \rightarrow X$  — морфизм, для которого  $p^2 = p$ , то  $X = X_1 \oplus X_2$ , причем  $p$  — проекция на  $X_1$ .

Есть стандартная процедура, как из аддитивной категории получить псевдоабелеву: **полноление по Каруби (карубизация)**. Таким образом по  $\text{Cor}_F$  строится **категория мотивов Гротендика–Чжоу  $\mathcal{M}$** . Ее объекты — пары  $(X, p)$ , где  $p: X \rightarrow X$  — идемпотент. Неформально говоря, эта пара символизирует «образ» морфизма  $p$  (которого может не быть в исходной категории). Морфизмы определяются так:

$$\text{Mor}((X, p), (Y, q)) = q \circ \text{Mor}(X, Y) \circ p.$$

Есть функтор  $\text{Cor} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $X \mapsto (X, \text{id}_X)$ . Для многообразия  $X$  объект  $M(X) = (X, \text{id}_X)$  называется **мотивом  $X$** . На самом деле, нужно писать  $\text{Cor}_{\text{rat, eff}}$  вместо  $\text{Cor}$ , и  $\text{Chow}^{\text{eff}}$  вместо  $\mathcal{M}$ . Мы получили функторы

$$\begin{array}{ccccc} \text{SmProj}/F & \longrightarrow & \text{Cor}_{\text{rat, eff}}(F) & \longrightarrow & \text{Chow}^{\text{eff}}(F), \\ & & \searrow M & & \end{array}$$

где  $M$  — функтор «взятия мотива». При этом  $M(X \coprod Y) = M(X) \oplus M(Y)$ ,  $M(X \times Y) = M(X) \otimes M(Y)$ .

### 3.3 Мотив проективной прямой

Попробуем «посчитать» мотив проективной прямой  $M(\mathbb{P}^1)$ . Напомним, что у  $\text{CH}(\mathbb{P}^1)$  стоит  $\mathbb{Z}$  в коразмерностях 0 (с образующей 1) и 1 (с образующей  $[\text{pt}]$ ). Рассмотрим вложение  $i: \text{pt} \rightarrow \mathbb{P}^1$  и проекцию  $\pi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{pt}$ . Композиция  $\pi \circ i: \text{pt} \rightarrow \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{pt}$  тождественна, поэтому  $p = i \circ \pi$  является проектором на  $\mathbb{P}^1$ . Это идемпотент, отправляющий все в точку. Поэтому в категории мотивов  $M(\mathbb{P}^1) = M(\text{pt}) \oplus (\mathbb{P}^1, 1 - [p])$ . Слагаемое  $(\mathbb{P}^1, 1 - [p])$  обозначается через  $\mathbb{L}$  и называется **мотивом Лефшеца**. Это аналог аффинной прямой в категории мотивов. Оказывается, мотив Лефшеца неразложим.

Мотив точки часто обозначается через  $\mathbb{Z} = M(\text{pt})$ ; он играет роль нейтрального объекта относительно  $\otimes$ . При этом мотив Лефшеца  $\mathbb{L}$  обозначается через  $\mathbb{Z}(1)[2] = \mathbb{Z}\{1\}$ . Тензорные степени мотива Лефшеца обозначаются так:  $L^{\otimes k} = \mathbb{Z}(k)[2k] = \mathbb{Z}\{k\}$ . Это в некотором смысле «мотив»  $k$ -мерного аффинного пространства.

### 3.4 Представимость функтора Чжоу

Часто удается разложить мотив многообразия  $X$  в прямую сумму вида  $M(X) = \bigoplus M(Y_i) \otimes \mathbb{L}^{\otimes k_i}$ , где  $Y_i$  — какие-то другие многообразия. Поэтому удобно обозначение  $M(Y) \otimes \mathbb{L}^{\otimes k} = M(Y)(k)[2k] = M(Y)\{k\}$ .

Что дает такого рода разложение?

**Факт 3.4.1.** Пусть  $M(X) = \bigoplus M(Y_i) \otimes \mathbb{L}^{\otimes k_i}$ . Тогда  $\text{CH}^n(X) = \bigoplus \text{CH}^{n-k_i}(Y_i)$ .

Например, из разложения  $M(\mathbb{P}^1) = M(\text{pt}) \otimes M(\text{pt})\{1\}$  следует, что

$$\begin{aligned} \text{CH}^0(\mathbb{P}^1) &= \text{CH}^0(\text{pt}) = \mathbb{Z}, \\ \text{CH}^1(\mathbb{P}^1) &= \text{CH}^1(\text{pt}) \oplus \text{CH}^0(\text{pt}) = \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Вообще,  $\text{CH}^n(X) = \text{Mor}(X, \mathbb{L}^{\otimes n})$  и  $\text{CH}_n(X) = \text{Mor}(\mathbb{L}^{\otimes n}, X)$ , то есть,  $\text{CH}$  — представимый функтор в категории мотивов, а  $\mathbb{L}$  играет роль пространства Эйленберга–Маклейна.

Умножение в  $\mathrm{CH}^*$  тоже происходит из категории мотивов. Пусть  $\alpha \in \mathrm{CH}^k(X)$ ,  $\beta \in \mathrm{CH}^n(X)$ , то есть  $\alpha: M(X) \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes k}$ ,  $\beta: M(X) \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes n}$ . Перемножая эти отображения, получаем

$$\alpha \otimes \beta: M(X) \otimes M(X) \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes k} \otimes \mathbb{L}^{\otimes n}.$$

Правая часть изоморфна  $\mathbb{L}^{\otimes(k+n)}$ . Взяв композицию с морфизмом  $M(\Delta): M(X) \rightarrow M(X \times X)$ , получаем  $\alpha \cup \beta: M(X) \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes(k+n)}$ .

### 3.5 Теорема Карпенко

**Теорема 3.5.1** (Карпенко, 2000). Пусть дана фильтрация многообразия  $X$  замкнутыми (не обязательно гладкими) подмножествами

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_0 & \longleftarrow & X_1 & \longleftarrow & X_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & X_n & \longleftarrow & X_{n+1} = \emptyset. \\ & & \downarrow \mathbb{A}^{k_0} & & \downarrow \mathbb{A}^{k_1} & & & & & & \downarrow \mathbb{A}^{k_n} \\ & & Y_0 & & Y_1 & & \dots & & & & Y_n \end{array}$$

Вертикальные стрелки означают, что для каждого  $i = 0, \dots, n$  задан плоский морфизм  $X_i \setminus X_{i+1} \rightarrow Y_i$ , слои которого — аффинные пространства  $\mathbb{A}^{k_i}$ .

Тогда  $M(X) = \bigoplus M(Y_i)\{k_i\}$  и, кроме того,  $M(X) = \bigoplus M(Y_i)\{\dim X - \dim Y_i - k_i\}$ . В частности, имеется функториальный (по  $Z$ ) изоморфизм  $\mathrm{CH}^*(X \times Z) \simeq \bigoplus \mathrm{CH}^{*-k_i}(Y_i \times Z)$ .

Фильтрация из теоремы 3.5.1 называется **относительным клеточным разложением**.

**Пример 3.5.2.** Фильтрация

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longleftarrow & \mathrm{pt} \\ & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & \mathrm{pt} & \end{array}$$

приводит к разложению  $M(\mathrm{pt}) \oplus M(\mathrm{pt})\{1\}$ .

**Пример 3.5.3.** Фильтрация

$$\begin{array}{ccccc} Q \times Q & \longleftarrow & \{f(u, v) = 0\} & \longleftarrow & Q \\ & \downarrow \mathbb{A}^{\dim Q} & & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & Q & & \mathrm{OGr}(1, 2; f) & \end{array}$$

из раздела 2.7 приводит к разложению

$$M(Q \times Q) = M(Q) \oplus M(\mathrm{OGr}(1, 2; Q))\{1\} \oplus M(Q)\{\dim Q\}.$$

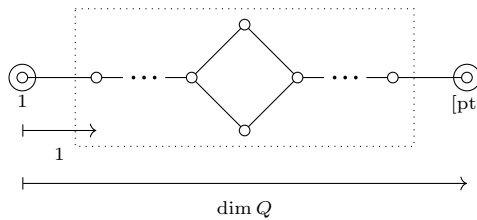
**Пример 3.5.4.** Пусть на квадрике  $Q$  есть рациональная точка (то есть, форма  $q$  изотропна). Тогда  $q = \langle 1, -1 \rangle \perp q'$ , и есть фильтрация

$$\begin{array}{ccccc} Q & \longleftarrow & X' & \longleftarrow & \mathrm{pt}, \\ & \downarrow \mathbb{A}^{\dim Q} & & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & \mathrm{pt} & & Q' & \end{array}$$

где  $Q' = \{q' = 0\}$ . Получаем разложение

$$M(Q) = M(\mathrm{pt}) \oplus M(Q')\{1\} \oplus M(\mathrm{pt})\{\dim Q\}.$$

На картинке это выглядит так:

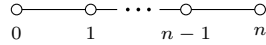


Обратите внимание, что на картинке выделен мотив подквадрики  $Q'$ , который сдвигается на 1. Кроме того, мотив точки (справа) сдвигается на  $\dim Q$ . Иными словами, у нас появились проекторы  $1 \times [\text{pt}]$ ,  $[\text{pt}] \times 1$ ,  $\Delta_Q - 1 \times [\text{pt}] - [\text{pt}] \times 1$ .

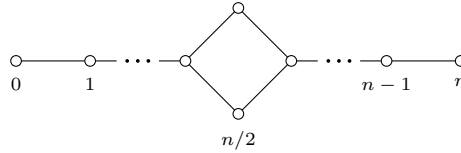
**Замечание 3.5.5.** Обозначение  $\mathbb{Z}(1)[2]$  для мотива Лефшеца может показаться странным. Здесь второй сдвиг соответствует сдвигу в триангулированной категории Воеводского. При желании можно представлять это как композицию двух сдвигов:  $(1)[1]$  — сдвиг на  $\mathbb{G}_m$ ,  $(0)[1]$  — сдвиг на  $S^1$ .

**Замечание 3.5.6.** В общем случае, разложение Брюа показывает, что если  $G$  — расцепимая группа,  $P$  — ее параболическая подгруппа, то мотив однородного многообразия  $G/P$  равен прямой сумме сдвигов  $\mathbb{Z}$ :  $M(G/P) = \bigoplus \mathbb{Z}\{i\}$ . При этом  $\mathbb{Z}\{i\}$  встречается столько раз, каково количество минимальных представителей классов смежности из  $W/W_P$  длины  $i$ . Поэтому сдвиги считаются из диаграммы Хассе.

**Пример 3.5.7.** Например, для  $\mathbb{P}^n$  диаграмма Хассе выглядит так:



Поэтому мотив  $\mathbb{P}^n$  равен  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{1\} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\{n\}$ . Для [расцепимой] квадрики  $Q$  четной размерности диаграмма такая:



Поэтому  $M(Q) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{1\} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\{n/2\}^{\otimes 2} \oplus \mathbb{Z}\{n/2+1\} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\{n\}$ .

### 3.6 Метод общей точки

Пока что мы получали мотивные разложения только с помощью фильтраций и теоремы Карпенко. Сейчас мы узнаем еще один прием — *метод общей точки*. Пусть  $X, Y$  — многообразия, причем  $Y$  неприводимо. Рассмотрим  $X_{F(Y)}$  и его кольцо Чжоу  $\text{CH}^*(X_{F(Y)})$  (напомним, что  $F(Y)$  — поле рациональных функций на  $Y$ ).

**Лемма 3.6.1.** *Отображение  $\text{CH}^*(X \times Y) \rightarrow \text{CH}^*(X_{F(Y)})$ , полученное из декартова квадрата*

$$\begin{array}{ccc} X_{F(Y)} & \longrightarrow & X \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } F(Y) & \hookrightarrow & Y, \end{array}$$

*сюръективно.*

*Доказательство.* Указанную диаграмму можно представлять себе как индуктивный предел диаграмм вида

$$\begin{array}{ccc} X \times U & \longrightarrow & X \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & Y, \end{array}$$

где  $U$  — открытое непустое в  $Y$  (поскольку  $\text{Spec } F(Y) = \varinjlim U$ ). Но каждое полученное таким образом отображение  $\text{CH}^*(X \times Y) \rightarrow \text{CH}^*(X \times U)$  сюръективно в силу точной последовательности локализации.  $\square$

Как этим пользоваться? Чтобы выделить прямое слагаемое в мотиве  $X$ , нам нужно найти проектор  $p \in \text{CH}^{\dim X}(X \times X)$ . Для этого есть два варианта:

1. взять  $Y := X$ , выбрать какой-то элемент из  $\text{CH}^i(X_{F(X)})$  и поднять его в  $\text{CH}^i(X \times X)$ ;

2. взять какой-нибудь  $Y$ , построить элементы из  $\mathrm{CH}^i(X \times Y)$ ,  $\mathrm{CH}^i(Y \times X)$ , взять их композицию, и дальше как в первом пункте.

Пусть  $X$  — гладкое проективное над  $F$ . Напомним, что цикл  $\alpha \in \mathrm{CH}^*(X_{\overline{F}})$  называется рациональным, если он лежит в образе отображения

$$\mathrm{res}: \mathrm{CH}^*(X) \rightarrow \mathrm{CH}^*(X_{\overline{F}}).$$

Аналогично, можно рассмотреть отображение

$$\mathrm{res}: \mathrm{CH}^*(X \times X) \rightarrow \mathrm{CH}^*(X_{\overline{F}} \times X_{\overline{F}}).$$

Правая часть гораздо лучше левой.

Предположим, что мы нашли цикл  $p \in \mathrm{CH}^*(X_{\overline{F}} \times X_{\overline{F}})$  такой, что

1.  $p$  — проектор (в смысле композиции, определенной в разделе 3.1);
2.  $p$  рационален, то есть,  $p$  поднимается до какого-то  $\tilde{p} \in \mathrm{CH}^*(X \times X)$ .

Следует ли из этого, что  $\tilde{p}$  является проектором? Вообще говоря — нет, но для однородных многообразий есть такая теорема.

**Теорема 3.6.2** (Теорема нильпотентности Роста). *Если  $X$  — проективное однородное многообразие,  $p$  — рациональный проектор на  $X_{\overline{F}}$ , то он поднимается до проектора  $\tilde{p}$  на  $X$ . Более сильное утверждение:*

$$\ker(\mathrm{CH}^*(X \times X) \rightarrow \mathrm{CH}^*(X_{\overline{F}} \times X_{\overline{F}}))$$

*состоит из нильпотентных (в смысле композиции) элементов.*

Как выглядят очевидные элементы  $\mathrm{CH}^*(X \times X)$ ? Можно взять  $\alpha \in \mathrm{CH}^*(X)$ ,  $b \in \mathrm{CH}^*(X)$ , и получить  $a \times b \in \mathrm{CH}^*(X \times X)$ .

**Упражнение 3.6.3.** В этом случае  $(a \times b) \circ (c \times d) = \deg(ad)(c \times b)$ , где  $\deg: \mathrm{CH}^*(Y) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathrm{pt})$  происходит из морфизма  $Y \rightarrow \mathrm{pt}$ .

**Упражнение 3.6.4.** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо,  $I \trianglelefteq R$  — идеал, состоящий из нильпотентных элементов. Тогда любой идемпотент в  $R/I$  поднимается до идемпотента в  $R$ .

**Определение 3.6.5.** Многообразие  $X$  называется **клеточным**, если существует фильтрация вида

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_0 & \hookleftarrow & X_1 & \hookleftarrow & X_2 & \hookleftarrow & \dots \hookleftarrow X_n \hookleftarrow X_{n+1} = \emptyset, \\ & & \downarrow \mathbb{A}^{k_0} & & \downarrow \mathbb{A}^{k_1} & & \downarrow \mathbb{A}^{k_n} \\ & & \mathrm{pt} & & \mathrm{pt} & & \mathrm{pt} \end{array}$$

в которой все базы — точки.

**Пример 3.6.6.** Разложение Брюа говорит, что если группа  $G$  расщепима,  $P$  — параболическая подгруппа в  $G$ , то многообразие  $G/P$  клеточное.

Из теоремы Карпенко 3.5.1 следует, что для клеточного многообразия  $M(X) = \bigoplus \mathbb{Z}\{r_i\}$ .

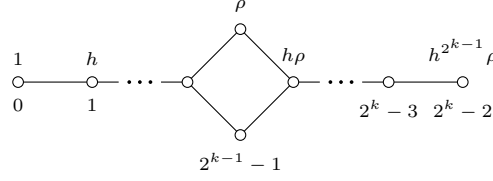
**Определение 3.6.7.** Многообразие  $X$  называется **клеточным над общей точкой** (generically cellular), если  $X_{F(X)}$  клеточное.

**Пример 3.6.8.** Пусть  $Q$  — **Квадрика Пфистера**, то есть,  $Q = \{q = 0\}$ , где  $q = \langle a_1, \dots, a_k \rangle = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_k \rangle$  —  $k$ -кратная форма Пфистера (размерность  $Q$  равна  $2^k - 2$ ). Тогда  $Q$  клеточная над общей точкой.

Верно и обратное: все анизотропные четномерные квадрики, клеточные над общей точкой, так выглядят.

### 3.7 Мотив квадрики Пфистера

Пусть  $Q$  — квадрика Пфистера размерности  $2^k - 2$ . Мы знаем, что  $Q_{F(Q)}$  — клеточное многообразие. Обозначим образующие компонент  $\mathrm{CH}^*(Q_{F(Q)})$ :



Возьмем  $\rho \in \mathrm{CH}^*(Q_{F(Q)})$  и поднимем его до какого-то элемента  $\alpha \in \mathrm{CH}^*(Q \times Q)$ . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \alpha \in \mathrm{CH}^*(Q \times Q) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*(Q_{F(Q)}) \ni \rho \\ \downarrow \text{res} & & \downarrow \simeq \\ \bar{\alpha} \in \mathrm{CH}^*(Q_{\bar{F}} \times Q_{\bar{F}}) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*(Q_{\bar{F}(Q)}) \ni \bar{\rho} \end{array}$$

Мы не умеем следить за  $\alpha$ , но знаем, что  $\bar{\alpha} = \text{res}(\alpha)$  переходит в  $\bar{\rho}$  (который отождествляется с  $\rho$  при помощи изоморфизма), и знаем, как выглядит нижняя горизонтальная стрелка.

Итак,  $\bar{\alpha}$  является прообразом  $\rho$ , поэтому обязан иметь вид

$$\bar{\alpha} = \bar{\rho} \times 1 + c_1 \cdot h^{2^{k-1}-2} \times h + c_2 \cdot h^{2^{k-1}-3} \times h^2 + \cdots + c_{2^{k-1}-1} \cdot 1 \times h^{2^{k-1}-1} + c \cdot 1 \times \bar{\rho}.$$

Заметим, что все слагаемые в правой части, кроме первого и последнего, содержатся в образе  $\text{res}$ , поскольку  $h$  рационален. Поэтому (подправив  $\alpha$ ) можно считать, что  $\bar{\alpha} = \bar{\rho} \times 1 + c \cdot 1 \times \bar{\rho}$ .

Кроме того, цикл  $2\bar{\rho}$  рационален, поскольку квадрика  $Q$  ращепляется квадратичным расщеплением. Действительно, если  $q = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ , достаточно взять поле  $F(\sqrt{a_1})$ . Над этим полем  $q$  изотропна, а потому гиперболична. Рассуждение заканчивается рассмотрением диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^*(Q) & \xleftrightarrow{\quad} & \mathrm{CH}^*(Q_{F(\sqrt{a_1})}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{CH}^*(Q_{\bar{F}}) & \xleftrightarrow{\quad} & \mathrm{CH}^*(Q_{\bar{F}(\sqrt{a_1})}). \end{array}$$

Стало быть, либо  $\bar{\rho} \times 1$  рационален, либо  $\bar{\rho} \times 1 + 1 \times \bar{\rho}$  рационален (в зависимости от четности  $c$ ).

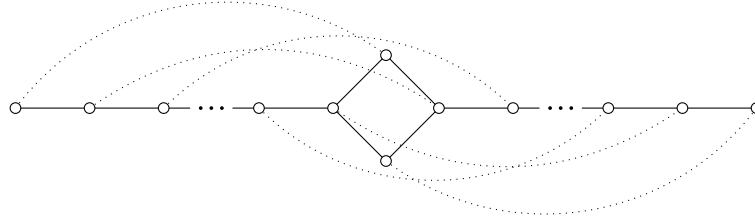
Предположим для начала, что  $\bar{\rho} \times 1$  рационален. Докажем, что в этом случае  $Q$  изотропна. Действительно, циклы  $\bar{\rho} \times 1$  и  $1 \times \bar{\rho}$  рациональны, а потому и  $(\bar{\rho} \times 1) \cdot (1 \times \bar{\rho}) = \bar{\rho} \times \bar{\rho}$  рационален. Кроме того,  $\bar{h} \times 1$  и  $1 \times \bar{h}$  рациональны, а потому и  $\overline{\text{pt}} \times \overline{\text{pt}}$  рационален. Рассмотрим пушфорвард относительно проекции  $Q \times Q$  на первый сомножитель:

$$\mathrm{CH}^*(\bar{Q} \times \bar{Q}) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\bar{Q}), \overline{\text{pt}} \times \overline{\text{pt}} \mapsto \overline{\text{pt}}.$$

Поэтому и цикл  $\overline{\text{pt}}$  рационален. Значит, на  $Q$  есть 0-цикл степени 1. По теореме Спрингера из этого следует, что на  $Q$  есть рациональная точка, то есть,  $Q$  изотропна — и это неинтересный случай.

Значит, на самом деле цикл  $\bar{\rho} \times 1 + 1 \times \bar{\rho}$  рационален. Из него можно постараться изготовить проектор. Заметим, что для любых  $i, j$  цикл  $(\bar{h}^i \bar{\rho}) \times \bar{j}^j + \bar{h}^i \times (\bar{h}^j \bar{\rho})$  тоже рационален. Как подобрать  $i, j$ , чтобы это был проектор? Заметим, что  $\bar{\rho}$  лежит в коразмерности  $2^{k-1} - 1$ , поэтому нужно, чтобы  $j = 2^{k-1} - 1 - i$ . Оказывается, этого достаточно: нужно вспомнить формулу  $(a \times b)(c \times d) = \deg(ad)c \times b$  и равенство  $\bar{h}^{2^{k-1}-1} \bar{\rho} = \overline{\text{pt}}$ . После этого прямое вычисление показывает, что мы получили проектор. Варьируя  $i$ , получаем  $2^{k-1} - 1$  проекторов.

Соответствующее разложение мотива  $Q$  можно нарисовать так:



Иными словами, над базой слагаемые в разложении мотива квадрики объединяются в пары.

**Упражнение 3.7.1.** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо,  $I \trianglelefteq R$  — идеал, состоящий из нильпотентных элементов. Тогда любой обратимый элемент  $R/I$  поднимается до обратимого элемента в  $R$ .

Слагаемое, которое дает первый проектор из этих, называется **мотивом Роста** и обозначается через  $R$ . Таким образом, над замыканием  $\bar{R} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{2^{k-1} - 1\}$ . Мотив квадрики Пфистера, таким образом, составлен из сдвигов мотива Роста:

$$M(Q) = R \oplus R\{1\} \oplus \dots \oplus R\{2^{k-1} - 1\}.$$

**Факт 3.7.2.** Пусть  $\langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle, \langle\langle a'_1, \dots, a'_k \rangle\rangle$  — две  $k$ -формы Пфистера. Соответствующие этим квадрикам мотивы Роста изоморфны (в категории мотивов) тогда и только тогда, когда сами формы изоморфны, что в свою очередь равносильно равенству чашечных произведений  $(a_1) \cup \dots \cup (a_k) = (a'_1) \cup \dots \cup (a'_k)$  в  $H^k(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

**Замечание 3.7.3.** Мотив Роста над замыканием превращается в  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{2^{k-1} - 1\}$ . Верно и обратное: если мотив над замыканием выглядит так, то это мотив Роста (теорема Никиты Семенова).

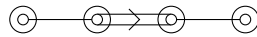
### 3.8 Пример: $F_4$

Над замкнутым полем группа типа  $F_4$  — это автоморфизмы эрмитовых матриц  $3 \times 3$  над октонионами:  $F_4 = \text{Aut}(H_3(\mathbb{O}))$ .

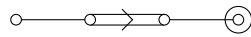
В общем случае приведем сначала «конструкцию по модулю 2». Вместо  $\mathbb{O}$  нужно взять другие октонионы (они заданы формой Пфистера  $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$ ), и диагональную эрмитову форму вида  $\langle 1, -d, -e \rangle$ . Здесь  $a, b, c, d, e \in F^*/(F^*)^2$ . Если у поля  $F$  нет расширений нечетной степени, то любая группа типа  $F_4$  так выглядит.

Например, над  $\mathbb{R}$  есть три группы типа  $F_4$ :

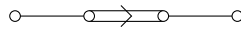
1. построенная по расщепимым октонионам (и тогда неважно, каковы  $d, e$ );



2. построенная по компактным октонионам (**октавам**) и  $d = e = 1$ ;



3. построенная по октавам и  $d = e = -1$  — она анизотропна (над  $\mathbb{R}$  это равносильно компактности).



По общей теории скрученных форм над любым полем группа типа  $F_4$  — это группа автоморфизмов алгебры  $J$ , где  $J$  — скрученная форма йордановой алгебры  $H_3(\mathbb{O})$ .

Приведем теперь «конструкцию по модулю 3». Пусть  $D$  — центральная простая алгебра степени 3. Они все циклические, поэтому  $D = (a, b)_3 = \langle x, y \mid x^3 = a, y^3 = b, xy = \zeta yx \rangle$  для некоторых



$a, b \in F^*/(F^*)^3$ . Здесь  $\zeta^3 = 1$ . Возьмем еще  $c \in F^*/(F^*)^2$ . тогда на  $D \oplus D \oplus D$  можно завести структуру йордановой алгебры  $J(a, b, c)$  (с помощью скаляра  $c$ ). Ее норма выглядит так:

$$N(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) = \text{Nrd}(\alpha) + c \text{Nrd}(\beta) + c^{-1} \text{Nrd}(\gamma) - \text{Trd}(\alpha\beta\gamma),$$

где  $\text{Trd}$  — приведенный след. Автоморфизмы этой нормы образуют группу типа  $E_6$ , а подгруппа в ней, сохраняющая единицу (то есть,  $1 \oplus 0 \oplus 0$ ) — это группа типа  $F_4$ .

**Гипотеза 3.8.1** (Ослабленный вариант гипотезы Серра–Роста). *Полученная группа типа  $F_4$  зависит только от  $\{a, b, c\} \in K_3^M(F)/3$  (или, что то же самое, от  $(a) \cup (b) \cup (c) \in H^3(F, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ ).*

Известно, что если  $J(a, b, c) = J(a', b', c')$ , то  $\{a, b, c\} = \{a', b', c'\}$ .

Если у поля нет квадратичных расширений, то любая скрученная форма  $H_3(\mathbb{O})$  имеет вид  $J(a, b, c)$ .

Для любого поля  $F$  определен инвариант

$$g_3: H^1(F, F_4) \rightarrow H^3(F, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}).$$

- Если у  $F$  нет квадратичных расширений, то образ  $g_3$  — это в точности чистые символы  $(a) \cup (b) \cup (c)$ .
- В этом случае ядро тривиально.
- Гипотеза состоит в том, что  $g_3$  инъективно.

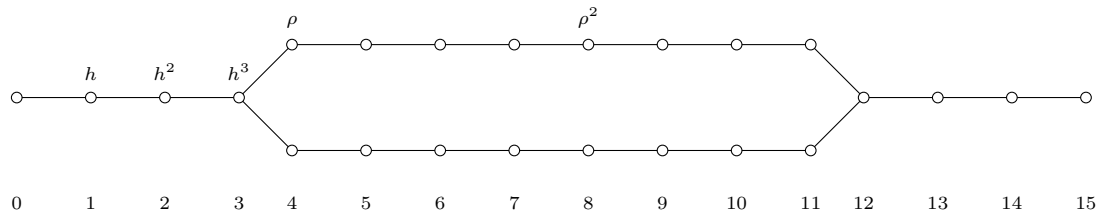
Мы построили алгебру  $J(a, b, c)$  и группу  $G = \text{Aut}(J(a, b, c))$ .

**Факт 3.8.2.** Группа  $G$  или расцепима, или анизотопна (как и в случае группы изометрий пфистеровых форм).

В частности, если  $X$  —  $G$ -однородное проективное многообразие, то оно является клеточным над общей точкой, то есть,  $X_{F(X)}$  клеточное. Пусть  $X$  — скрученная форма  $F_4/P_4$ .

Отступление: Ж.-П. Воннет показал, что  $M(\xi(G_2/P_1)) \simeq M(\xi(G_2/P_2))$ . Многообразия  $G_2/P_1$  и  $G_2/P_2$  оба имеют размерность 5. На самом деле,  $G_2/P_1$  — квадрика. Более того, это максимальный сосед квадрики Пфистера, и поэтому ее мотив раскладывается на мотивы Роста. Напомним, что  $G_2 = \text{Aut}(\mathbb{O})$ , где  $\mathbb{O}$  задается формой  $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$ . Возникающий мотив Роста отвечает как раз квадрике  $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$ . Вопрос: что если взять  $F_4/P_1$  и  $F_4/P_4$ ? У них тоже одинаковая размерность и многочлен Пуанкаре. Теорема Зайнуллина–Николенко–Семенова гласит, что  $M(\xi(F_4/P_1)) \simeq M(\xi(F_4/P_2))$ , если рассматриваемая группа типа  $F_4$  имеет вид  $\text{Aut}(J(a, b, c))$ .

Размерность  $F_4/P_4$  равна 15. Нарисуем диаграмму Хассе для этого многообразия. С точностью до каких-то ребер внутри она выглядит так:



1. Берем образующую в  $\text{CH}^1(F_4/P_4)$ . Она рациональная, то есть, лежит в образе отображения

$$\text{CH}^1(\xi(F_4/P_4)) \xrightarrow{\text{res}} \text{CH}^1(F_4/P_4).$$

В  $F_4$  решетка весов совпадает с решеткой корней. В частности,  $\varpi_4$  — корень.

2. Тогда  $h^2, h^3$  — образующие  $\text{CH}^2$  и  $\text{CH}^3$ .
3. Далее,  $h^4$  и  $\rho$  — базис для  $\text{CH}^4$ .
4. Кроме того,  $\rho^2 h^7 = [\text{pt}] \pmod{3}$ .



**Замечание 3.8.4.** Точно так же доказывается, что

$$M(\xi(F_4/P_1)) = \bigoplus_{i=0}^7 R_{3,3}(\{a, b, c\})\{i\}.$$

Более того, мотив любого  $G$ -однородного проективного многообразия  $Y$  раскладывается в сумму сдвигов мотива  $R_{3,3}(\{a, b, c\})$ . Для квадрики Пфистера верно аналогичное замечание.

**Теорема 3.8.5** (Зайнуллин–Петров–Семенов). *Пусть  $G$  — полупростая алгебраическая группа над  $F$ ,  $X$  —  $G$ -однородное проективное многообразие, клеточное над общей точкой,  $p$  — простое число. Тогда мотив  $M(X) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  изоморфен сумме  $R_p(G)$  с какими-то сдвигами, где  $R_p(G)$  не зависит от  $X$  и неразложим по модулю  $p$ .*

Нужно пояснить, что такое  $M(X) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ : в конструкции категории соответствий нужно взять  $\text{Mor}(X, Y) = \text{CH}^{\dim Y}(X \times Y)/p$ .

**Замечание 3.8.6.** Условие клеточности  $X_{F(X)}$  можно заменить на требование расщепимости  $G_{F(X)}$ .

**Замечание 3.8.7.** Мотив  $R_p(G)$  над алгебраическим замыканием раскладывается в сумму мотивов вида  $\mathbb{Z}/p = M(\text{pt}) \otimes \mathbb{Z}/p$  со сдвигами, и для этих сдвигов есть некоторая формула.

**Замечание 3.8.8.** Все ситуации, описанные в теореме, перечислены в работе Петрова–Семенова.

**Замечание 3.8.9.** Сами проекторы можно поднять в  $\mathbb{Z}$ , но не изоморфизмы между ними.

**Замечание 3.8.10.** Если  $G$  не содержит сомножителей типа  $A$  и  $p \neq 2, 3, 5$ , то  $R_p(G) = \mathbb{Z}/p$ . Случай  $p = 5$  возникает только для  $E_8$ .

**Замечание 3.8.11.** Мотив  $M(X) \otimes \mathbb{Q}$  раскладывается в прямую сумму мотивов  $M(\text{pt}) \otimes \mathbb{Q}$  со сдвигами.

**Замечание 3.8.12.** Если  $G = E_8$ ,  $p = 2$ , и инвариант Роста тривиален, то все  $G$ -однородные проективные многообразия  $X$  подходят. В этом случае  $R_2(G)$  — мотив Роста, отвечающий 5-символу (см. работу Никиты Семенова про конечные подгруппы  $E_8$ ).

### 3.9 $J$ -инвариант

Остается открытым вопрос, каков размер  $R_p(\xi G)$ . Мы знаем, что над замыканием получается  $R_p(\xi G)_{\overline{F}} = \bigoplus \mathbb{Z}/p\{\dots\}$ . Как посчитать эти сдвиги? Можно закодировать их многочленом: по прямой сумме  $\bigoplus_i \mathbb{Z}/p\{i\}^{\oplus a_i}$  построим **полином Пуанкаре**  $P(R_p(G), t) = \sum_i a_i t^i$ . Понятно, что этот многочлен контролирует образ отображения  $\text{CH}^*(X)/p \rightarrow \text{CH}^*(X_{\overline{F}})/p$ .

Сейчас мы построим набор целых чисел  $J_p(\xi G)$  —  $J$ -инвариант — со следующими свойствами:

1.  $P(R_p(\xi G), t)$  выражается через  $J_p(\xi G)$ ;
2.  $J_p(\xi G)$  контролирует, какие  $\xi G$ -однородные проективные многообразия действительно являются клеточными над общей точкой;
3. для многих исключительных групп  $J_p(\xi G)$  выражается через индекс Титса.

Пусть  $B \leq G$  — борелевская подгруппа. Рассмотрим «последовательность» чего-то

$$B \rightarrow G \rightarrow G/B \rightarrow BB = \text{pt} // B.$$

Переходя к кольцам Чжоу, получаем точную последовательность градуированных колец вида

$$\text{CH}^*(BB) \rightarrow \text{CH}^*(G/B) \rightarrow \text{CH}^*(G) \rightarrow \text{CH}^*(B).$$

При этом  $\text{CH}^*(B) = \mathbb{Z}$ . Заметим, что  $\text{CH}^*(G/B) \rightarrow \text{CH}^*(G)$  — сюръекция. Поэтому есть точная последовательность

$$\text{CH}^*(BB) \rightarrow \text{CH}^*(G/B) \rightarrow \text{CH}^*(G) \rightarrow 0.$$

Борелевская подгруппа гомотопически эквивалентна тору:  $B \sim \mathbb{G}_m \times \cdots \times \mathbb{G}_m$ . Покажем, что  $\mathrm{CH}^*(BB) = S^*(X^*(T))$ .

Что такое  $B\mathbb{G}_m$ ? Первое приближение:  $\mathbb{P}^n = (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m$ . Правильный ответ:  $B\mathbb{G}_m = \varinjlim_n \mathbb{P}^n$ . Мы уже знаем, что  $\mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ . Поэтому  $\mathrm{CH}^*(B\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}[x]$  — проективный предел в категории градуированных колец (но не в категории колец).

Пусть  $\chi_1, \dots, \chi_l$  — базис решетки  $X^*(T)$ . Если  $G$  односвязна, можно взять  $\varpi_1, \dots, \varpi_l$ . Если  $G$  присоединенная, можно взять  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ . Тогда  $S^*(X^*(T)) \simeq \mathbb{Z}[\chi_1, \dots, \chi_l]$ .

Чтобы описать отображение  $\mathrm{CH}^*(BB) \rightarrow \mathrm{CH}^*(G/B)$ , достаточно задать образы элементов  $\chi_i$ . Положим  $\chi_i \mapsto [L_{\chi_i}]$  (класс линейного расслоения  $L_{\chi_i}$  в группе Пикара). Здесь  $L_{\chi_i}$  — линейное расслоение на  $G/B$ , построенное следующим образом. Характер  $\chi_i$  является отображением  $B \rightarrow \mathbb{G}_m$ . Тогда  $L_{\chi_i} = G \times_B \mathbb{A}^1$ , где на  $\mathbb{A}^1$  задано действие с помощью  $\chi_i$ . Каноническое отображение  $G \times_B \mathbb{A}^1 \rightarrow G \times_B \mathrm{pt} = G/B$  превращает  $L_{\chi_i}$  в линейное расслоение.

Пока что  $G$  была расщепима. Оказывается, если подкрутить все на  $\xi$ , все  $[L_{\chi_i}]$  останутся рациональными.

**Пример 3.9.1.** Рассмотрим  $\mathbb{P}^1 = \mathrm{SL}_2/B$  и обозначим характер тора через  $\xi$ . Нас интересует действие  $B$  на  $\mathrm{SL}_2 \times_B \mathbb{A}^1$ , при котором матрица  $\begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$  действует на  $\mathbb{A}^1$  умножением на  $\alpha$ . Упражнение:  $L_\xi = \mathcal{O}(-1)$ ,  $L_{\xi^{-1}} = \mathcal{O}(1)$ .

В общем случае в  $G/B$  есть клетки Шуберта коразмерности 1. Пусть  $G$  односвязна. Эти клетки соответствуют фундаментальным характеристам: клетке  $\chi_i$  сопоставляется  $i$ -ая клетка Шуберта коразмерности 1, равная  $c_1(L(\chi_i))$ .

Теперь мы взяли  $\xi \in H^1(F, G)$ . Тогда  $\xi(G/B)$  — многообразие, клеточное над общей точкой (при переходе к его полю функций у  $G$  появляется борелевская подгруппа, поэтому можно написать фильтрацию). Нас интересует образ отображения

$$\mathrm{CH}^*(\xi(G/B)) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{CH}^*(G/B).$$

Все, что приходит с  $\mathrm{CH}^*(BB)$ , лежит в образе  $\mathrm{res}$ , поскольку линейные расслоения можно скрутить:  $\mathrm{res}([L_\chi]) = [L_\chi]$ . Точность сохранится при факторизации по  $p$ :

$$\mathrm{CH}^*(BB)/p \rightarrow \mathrm{CH}^*(G/B)/p \rightarrow \mathrm{CH}^*(G)/p \rightarrow 0.$$

При этом  $\mathrm{CH}^*(BB)/p \simeq \mathbb{Z}/p[x_1, \dots, x_l]$ . Умножение  $G \times G \rightarrow G$  дает нам отображение  $\mathrm{CH}^*(G) \rightarrow \mathrm{CH}^*(G) \otimes \mathrm{CH}^*(G)$ , которое превращает  $\mathrm{CH}^*(G)$  в алгебру Хопфа. Таким образом,  $\mathrm{CH}^*(G)/p$  — алгебра Хопфа над  $\mathbb{Z}/p$ , градуированная, конечномерная, связная, коммутативная.

**Теорема 3.9.2.** Все такие алгебры Хопфа изоморфны (как алгебры)  $\mathbb{Z}/p[x_1, \dots, x_r]/(x_i^{p^{k_i}})$ .

Если  $X$  — клеточное над  $\mathbb{C}$ , можно сравнить  $\mathrm{CH}^*(X)$  и  $H_{\mathrm{sing}}^*(X)$ . Оказывается,  $\mathrm{CH}^i(X) = H_{\mathrm{sing}}^{2i}(X)$ . Для  $G$  над  $\mathbb{C}$  есть нетривиальные элементы в  $H_{\mathrm{sing}}^{2i+1}(G)$ . Например,  $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ , и  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  гомотопически эквивалентно  $S^3$ .

**Замечание 3.9.3.** Если  $p \neq 2, 3, 5$ , и  $G$  не изогенична  $\mathrm{SL}_n$ , то  $\mathrm{CH}^*(G)/p = \mathbb{Z}/p$ . Случай  $p = 5$  возникает только для  $E_8$ , а случай  $p = 3$  — только для  $F_4, E_6, E_7, E_8$  (это делители числа Кокстера).

*Таблица Каца* дает для каждой  $G$  и для каждого  $p$  значения  $k_i$  и степени элементов  $x_i$ . Обозначим  $d_i = \deg(x_i)$ .

Заметим, что  $\xi(G/B) = (\xi G)/B$ ; это дает короткую точную последовательность

$$\xi G \rightarrow (\xi G)/B \rightarrow BB,$$

из которой получаем стрелку  $\mathrm{CH}^*(BB)/p \rightarrow \mathrm{CH}^*(\xi(G/B))/p$ . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{CH}^*(\xi(G/B))/p & & \\ & \nearrow & \downarrow & \searrow \varphi & \\ \mathrm{CH}^*(BB)/p & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*(G/B) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*(G)/p \\ & & & & \parallel \\ & & & & (\mathbb{Z}/p)[x_i]/(x_i^{p^{k_i}}). \end{array}$$

Нас интересует образ вертикальной стрелки в  $\mathrm{CH}^*(G/B)/p$ . Обозначим через  $j_i$  наименьшее целое число такое, что  $x_i^{p^{j_i}}$  + члены меньшего порядка  $\in \mathrm{im}(\varphi)$ . Порядок мы понимаем в смысле Deglex;  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_r$ , если  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_r$ . Можно рассмотреть  $\mathrm{CH}^*(G)/p$  как комодуль над собой, и тогда  $\mathrm{im}(\varphi)$  будет подкомодулем.

Заметим, что  $0 \leq j_i \leq k_i$ , так как  $x_i^{p^{k_i}} = 0$ . Равенство  $j_i = 0$  равносильно тому, что  $x_i$  + члены меньшего порядка  $\in \mathrm{im}(\varphi)$ . Набор чисел  $(j_i)$  обозначим через  $J_p(\xi)$  (он действительно зависит только от  $\xi$ , но не от  ${}_\xi G$ ). Тогда полином Пуанкаре выглядит так:

$$P(R_p(G), t) = \prod_{i=1}^r \frac{1 - t^{p^{j_i} \cdot d_i}}{1 - t^{d_i}}.$$

**Пример 3.9.4.** Рассмотрим группу типа  $F_4$ ,  $p = 3$ . Тогда  $\mathrm{CH}^*(G) = (\mathbb{Z}/3)[x_1]/(x_1^3)$ , где  $d_1 = \deg x_1 = 4$ . Таким образом,  $k_1 = 1$ , и для  $j_1$  есть два варианта: 0 и 1.

- случай  $J_p(\xi) = (0)$  неинтересен (см. замечание: полином Пуанкаре равен 1;
- в случае  $J_p(\xi) = (1)$  получаем полином Пуанкаре

$$\frac{1 - t^{3 \cdot 4}}{1 - t^4} = 1 + t^4 + t^8.$$

**Замечание 3.9.5.**  $J_p(\xi) = 0$  тогда и только тогда, когда  ${}_\xi G$  расщепляется расширением степени, взаимно простой с  $p$ .

**Пример 3.9.6.** Пусть  $G$  — группа типа  $G_2$ ,  $p = 2$ . Тогда  $\mathrm{CH}^*(G) = (\mathbb{Z}/2)[x_1]/(x_1^2)$ , и  $\deg x_1 = 3$ . Снова два случая:

- неинтересный:  $J_p(\xi) = (0)$ ;
- $J_p(\xi) = (1)$ ; полином Пуанкаре равен

$$\frac{1 - t^{2 \cdot 3}}{1 - t^3} = 1 + t^3.$$

В этом случае  $R_2({}_\xi(G))$  — мотив Роста.

**Пример 3.9.7.** В случаях  $F_4$ ,  $E_6$  при  $p = 2$  ответ тот же, что и для  $G_2$ .

**Пример 3.9.8.** В случаях  $E_6^{\mathrm{sc}}$ ,  $E_7$  при  $p = 3$  ответ тот же, что и для  $F_4$ .

**Замечание 3.9.9.** Степень полинома  $P(R_p(G), t)$  равна  $\sum (p^{j_i} - 1)d_i$ . Оказывается, это равно  $\mathrm{cd}_p(X)$  (каноническая размерность). Попросту говоря, это наименьшая из размерностей рациональных циклов.

**Пример 3.9.10.** Пусть  $G$  — группа типа  $E_8$ ,  $p = 5$ . Тогда  $\mathrm{CH}^*(G) = (\mathbb{Z}/5)[x_1]/(x_1^5)$ , и  $\deg x_1 = 5 + 1 = 6$  (вообще,  $\deg x_i = p + 1$ , если  $r = 1$ ). В этом случае любое  ${}_\xi G$ -однородное проективное многообразие является клеточным над общей точкой. В нетривиальном случае полином Пуанкаре равен

$$\frac{1 - t^{5 \cdot 6}}{1 - t^6}.$$

**Пример 3.9.11.** Рассмотрим группу типа  $E_8$ ,  $p = 2$ . Тогда

$$\mathrm{CH}^*(G) = (\mathbb{Z}/2)[x_1, x_2, x_3, x_4]/(x_1^8, x_2^4, x_3^2, x_4^2),$$

$\deg x_1 = 3, \deg x_2 = 5, \deg x_3 = 9, \deg x_4 = 15$ . Это можно увидеть так: элементы  $x_2$  и  $x_3$  получаются операцией Стиррода из  $x_1$  а именно,  $x_2 = S^2(x_1)$  и  $x_3 = S^4(x_2)$ . При этом  $\deg S^m(x) = \deg x + m \cdot (p - 1)$ . Если  $m = \deg x$ , то  $S^m$  — возведение в степень  $p$ ; если же  $m > \deg x$ , то  $S^m(x) = 0$ . Операции Стиррода удовлетворяют следующим тождествам:

- $S^m$  линейны;

- $S^m(xy) = \sum_n S^n(x)S^{m-n}(y)$ ;
- Adem relations.

Из первых двух соотношений следует, что  $\sum_m S^m$  — гомоморфизм колец.

Что это означает для  $J_p(\xi)$ ? Мы знаем, что  $J_p(\xi) = (j_1, j_2, j_3, j_4)$ , причем  $0 \leq j_1 \leq 3$ ,  $0 \leq j_2 \leq 2$ ,  $0 \leq j_3, j_4 \leq 1$ . Из свойств  $S^m$  следует, что  $j_1 \geq j_2 \geq j_3$ . Кроме того,  $j_1 \leq j_2 + 1$  и  $j_2 \leq j_3 + 1$ . Если  $j_1 = 3$ , то  $j_2 = 2$  и  $j_3 = 1$ . Если же  $j_1 = 0$ , то  $j_2 = 0$ ,  $j_3 = 0$ , и возникает интересный случай, когда при этом  $j_4 = 1$  (заметим, что из равенства  $j_1 = 0$  следует, что инвариант Роста по модулю 2 тривиален). Тогда

$$P(R_2(\xi G), t) = \frac{1 - t^{2 \cdot 15}}{1 - t^{15}} = 1 + t^{15},$$

как у мотива Роста. Как мы уже упоминали, Никита Семенов доказал, что из этого следует, что это и есть мотив Роста. Получается некоторый инвариант в  $H^5(F, \mathbb{Z}/2)$ .

### 3.10 набросок доказательства теоремы 3.8.5

Во-первых, нам понадобится «теорема Крулля–Шмидта». О какой категории идет речь? Зафиксируем  $\xi G$  и рассмотрим категорию мотивов по модулю простого числа  $p$ , а в ней — псевдоабелеву подкатегорию, порожденную мотивами  $\xi G$ -однородных многообразий. То есть, мы берем замыкание относительно взятия прямых слагаемых и сдвигов (и тензорных произведений, хотя это не важно).

**Теорема 3.10.1** (Черноусов–Меркурьев). *В этой категории выполнена теорема Крулля–Шмидта: если есть разложение объекта в прямую сумму неразложимых, то оно единственно.*

Пусть теперь  $X, Y$  — проективные однородные многообразия,  $X \xrightarrow{f} Y$  — локально (по Зарискому) тривиальное расслоение с клеточным слоем  $F$ . В силу клеточности  $F$ , его мотив раскладывается в сумму сдвигов мотивов Тейта:

$$M(F) = \bigoplus \mathbb{Z}\{i\}.$$

Тогда  $M(X) = M(Y) \otimes M(F) = \bigoplus M(Y)\{i\}$ . Поэтому, в частности,  $\text{CH}(X) = \text{CH}(Y) \otimes \text{CH}(F)$  как  $\text{CH}(Y)$ -модуль. Это можно понять явно: если наше расслоение тривиализуется над  $U \subseteq Y$ , то морфизм  $U \times F \rightarrow U$  дает нам возможность по элементу  $a \in \text{CH}^*(F)$  построить цикл  $1 \times a$  и рассмотреть его замыкание в  $X$ . Такие замыкания как раз и образуют  $\text{CH}(Y)$ -базис в  $\text{CH}(X)$ , если в качестве  $a$  брать элементы базиса  $\text{CH}(F)$ .

Пусть теперь  $X$  —  $\xi G$ -однородное проективное многообразие:  $X = \xi(G/P)$ . Рассмотрим расслоение  $\xi(G/b) \rightarrow X$  со слоем  $P/B$ . Над  $F(X)$  наш торсор становится тривиальным, поэтому расслоение выглядит как  $G/B \rightarrow G/P$ . Оно локально тривиально по Зарискому, поэтому это верно и над некоторым открытым  $U \subseteq X$ . Теперь мы можем подействовать группой  $G$  и покрыть все  $X$  такими открытыми. Значит, все отображение локально тривиально по Зарискому. По теореме 3.10.1  $M(\xi(G/B)) = M(X) \otimes M(P/B)$ . Поэтому, если  $M(\xi(G/B)) \otimes (\mathbb{Z}/p)$  раскладывается в сумму сдвигов  $R_p(\xi)$ , то и  $M(X)$  тоже (по теореме Крулля–Шмидта).

Значит, достаточно для случая  $X = \xi(G/B)$  доказать, что  $M(X) \otimes (\mathbb{Z}/p)$  раскладывается в сумму неразложимых кусков  $R_p(\xi)$  со сдвигами. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \text{CH}^*(BB)/p & \longrightarrow & \text{CH}^*(\xi(G/B))/p & \twoheadrightarrow & \text{CH}^*(\xi)/p \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{CH}^*(BB)/p & \longrightarrow & \text{CH}^*(G/B)/p & \twoheadrightarrow & \text{CH}^*(G)/p. \end{array}$$

1. Мы знаем, что над замыканием  $\text{CH}^*(G)/p = (\mathbb{Z}/p)[x_1, \dots, x_r]/(x_i^{p^{k_i}})$ , и образ  $\text{CH}^*(BB)/p$  в  $\text{CH}^*(G/B)/p$  состоит из рациональных циклов. Обозначим через  $e_i$  любой прообраз элемента  $x_i$ .
2. Из определения  $J_p(\xi) = (j_1, \dots, j_r)$  мы знаем, что  $e_i^{p^{j_i}}$  + добавка — тоже рациональный цикл. У  $\text{CH}^*(G/B)/p$  как  $\text{CH}^*(BB)/p$ -модуля есть система образующих (точнее, базис над образом  $\text{CH}^*(BB)/p$ ), состоящая из элементов вида  $e^I = e_1^{j_1} \dots e_r^{j_r}$ , где  $I = (i_1, \dots, i_r)$ , и  $0 \leq I \leq p^K - 1$  (то есть,  $0 \leq i_m \leq p^{k_m} - 1$  для всех  $m$ ).

3. Ищем рациональные циклы на  $X \times X$  при помощи метода общей точки:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^*(X \times X) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*(X_{F(X)}) \\ \downarrow \mathrm{res} & & \downarrow \simeq \\ \mathrm{CH}^*(G/B \times G/B) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*((G/B)_{F(X)}). \end{array}$$

Возьмем какой-нибудь прообраз  $\alpha_i \in \mathrm{CH}^*(X \times X)$  элемента  $e_i \in \mathrm{CH}^*((G/B)_{F(X)})$ , и пусть  $\bar{\alpha}_i = \mathrm{res}(\alpha_i)$  — его образ в  $\mathrm{CH}^*(G/B \times G/B)$ . Тогда  $\bar{\alpha}_i = e_i \times 1 + \text{добавка}$ . Более аккуратные рассуждения показывают, что  $\bar{\alpha}_i = e_i \times 1 + (\text{добавка}) - 1 \times e_i$ .

4. Пусть цикл  $a \in \mathrm{im}(\mathrm{CH}^*(BB)/p)$  рационален. Можно найти «двойственный» к нему цикл  $a^\vee \in \mathrm{im}(\mathrm{CH}^*(BB)/p)$  такой, что  $\deg(e^{p^k-1} \cdot a \cdot a^\vee) = 1$ . То есть, на  $\mathrm{im}(\mathrm{CH}^*(BB)/p)$  есть невырожденная билинейная форма со значениями в  $\mathbb{Z}/p$ . Тогда цикл

$$q = \alpha^{p^J-1} \cdot \left( e^{p^J M} a \times e^{p^J(p^{K-J}-1-M)} a^\vee \right)$$

рационален, поскольку  $\alpha^{p^J-1}$  рационален, и степени  $e^{p^J}$  рациональны (по определению  $J$ -инварианта). Нетрудно проверить, что  $q$  — проектор (если проигнорировать добавки). Построение  $q$  зависит от произвольных  $M$  и  $a$  из образа. Если брать все возможные  $M$  такие, что  $0 \leq M \leq p^{K-J} - 1$ , и  $a$  из базиса образа, получается набор попарно ортогональных проекторов, которые в сумме дают диагональ.

Упражнение: некоторая степень любого элемента конечного моноида является идемпотентом (на самом деле, нужно брать не такую степень, а еще большую степень этого, чтобы убить добавки).

Посчитаем  $q \cdot q$ . Можно считать, что  $\alpha = e \times 1 - 1 \times e$ . Тогда  $\alpha^{p^J-1} = \sum_I e^I \times e^{p^J-1-I}$ , и поэтому

$$q = \sum_I e^{p^J M+I} a \times e^{p^K-p^J M-1-I} a^\vee = \deg(e^{p^K-1} a a^\vee)(\dots).$$

### 3.11 Группы типа $F_4$

Приведем пример многообразия, не расщепимого над общей точкой. Будем обозначать расщепимые октонионы через  $\mathbb{O}$ , а их компактную форму (над  $\mathbb{R}$ ) через  $C$ . Напомним, что над  $\mathbb{R}$  бывают такие группы типа  $F_4$ :

1.  $H_3(\text{компактная форма}, C)$ :
2.  $H_3(\mathbb{O})$ :
3.  $H_3(\text{гиперболическая форма}, C)$ :

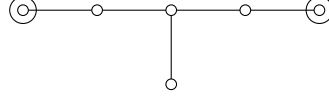
Что нарисовано в последнем случае? Существует поле  $F$  (например,  $F = \mathbb{R}$ ) и группа типа  $F_4$  над ним такие, что параболическая подгруппа типа  $P_4$  определена над  $\mathbb{R}$ , а остальные — нет. Пусть  $\xi \in H^1(F, F_4)$  — коцикл,  $X = {}_\xi(F_4/P_4)$ . Тогда  $\xi_{F(X)}$  может дать группу с индексом По модулю 2 есть два инварианта:

- $f_3: H^1(F, F_4) \rightarrow H^3(F, \mathbb{Z}/2)$ ;
- $f_5: H^1(F, F_4) \rightarrow H^5(F, \mathbb{Z}/2)$ .

Если у поля нет расширений нечетной степени, то это чистые формы. Поэтому есть 3-кратная и 5-кратная формы Пфистера, ассоциированные с  $\xi$ .

Пусть  $J$  — 27-мерная йорданова алгебра. Предполагаем, что она приведенная (reduced). Наш коцикл  $\xi \in H^1(F, F_4)$  удовлетворяет следующим равносильным условиям:

1. Каноническое отображение  $H^1(F, F_4) \rightarrow H^1(F, E_6)$  переводит наш коцикл  $\xi$  в изотропную группу с индексом Титса



2.  $g_3(\xi) = 0$ , где  $g_3: H^1(F, F_4) \rightarrow H^3(F, \mu_3^{\otimes 2})$ . Этого всегда можно добиться кубическим расширением; а если нет расширений нечетной степени, то это заведомо так.
3. Пусть  $Q_x(y) = yxy$  — квадратичная операция в  $J$ . Элемент  $e \in J$  называется **идемпотентом ранга 1**, если  $Q_e(J) \leq Fe$ . Это равносильно тому, что  $N(e) = 0$  и  $e^\# = 0$  (или тому, что  $N(e, e, x) = 0$  для всех  $x \in J$ ). Рассмотрим многообразие

$$\{\langle e \rangle \mid e \text{ — идемпотент ранга 1}\} = \xi(E_6/P_6).$$

Условие состоит в том, что у него есть рациональная точка.

Поэтому внутри  $\xi(E_6/P_6)$  есть  $\mathbb{G}_m$ , которая дает разложение вида  $J = Fe \oplus U \oplus V$  по весовым пространствам  $\mathbb{G}_m$ . При этом  $\dim U = 16$ ,  $\dim V = 10$ . Будем записывать элементы  $J$  как тройки вида  $(\alpha, b, c)$  в соответствии с этим разложением. Заметим, что  $\xi(E_6/P_6)$  — замкнутое подмногообразие в  $\mathbb{P}(J)$ . Следующая фильтрация будет  $\text{Spin}_{10}$ -инвариантной:

$$\begin{array}{ccccc} \xi(E_6/P_6) & \xleftarrow{\quad} & \{\alpha = 0\} & \xleftarrow{\quad} & \{\alpha = 0, b = 0\} = \text{Spin}_{10}/P_1 \\ & \downarrow \mathbb{A}^{16} & & \downarrow \mathbb{A}^5 & \\ & \{b = 0, c = 0\} = \text{pt} & & \{\alpha = 0, c = 0\} = \text{Spin}_{10}/P_5 & \end{array}$$

Можно начать с другого конца и получить такую фильтрацию:

$$\begin{array}{ccccc} \xi(E_6/P_6) & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{A}^8 & \xleftarrow{\quad} & \{c = 0\} & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{\quad} & \{c = 0, b = 0\} = \text{pt} \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \{b = 0, \alpha = 0\} = \text{Spin}_{10}/P_1 & & \{c = 0, \alpha = 0\} = \text{Spin}_{10}/P_5 & & & & \end{array}$$

Кстати,  $\text{Spin}_{10}/P_1$  — это восьмимерная пфистерова квадрака, которая и дает отображение  $f_3$ .

Если у  $\xi(E_6/P_6)$  есть рациональная точка, то есть большая клетка, и оно бирационально эквивалентно проективному пространству:

$$\begin{array}{ccc} \xi(E_6/P_6) & \dashrightarrow & \mathbb{P}(Fe \oplus U), \\ [\alpha : b : c] & \mapsto & [\alpha : b], \\ [\alpha^2 : \alpha b : Q_b(e)] & \leftarrow & [\alpha : b]. \end{array}$$

Локус стрелки  $[\alpha : b : c] \mapsto [\alpha : b]$  — восьмимерная квадрака. Локус стрелки  $[\alpha : b] \mapsto [\alpha^2 : \alpha b : Q_b(e)]$  — это  $\{\alpha = 0, Q_b(e) = 0\} = \text{Spin}_{10}/P_5$  — скрученная форма максимального ортогонального грассманиана.

Многообразие  $\xi(F_4/P_4)$  живет внутри  $\xi(E_6/P_6)$  как гиперплоское сечение вида  $\alpha + t(c) = 0$ , где  $t$  — линейная форма на  $V$  (напомним, что  $\dim V = 10$ ). Давайте пересечем все с этим уравнением. Получим бирациональное отображение

$$\xi(F_4/P_4) \dashrightarrow Q.$$

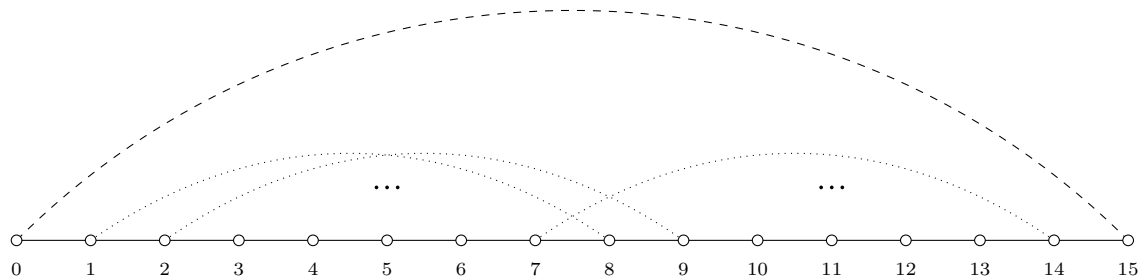
Локус слева — семимерная квадрака  $\text{Spin}_9/P_1$ . Локус справа — пятнадцатимерная квадрака  $\{\alpha^2 + t(Q_b(e)) = 0\} = \text{Spin}_{10}/P_5 = \text{Spin}_9/P_4$ . Здесь  $Q$  — норменная квадрака: мы начали с формы Пфистера  $\langle a, b, c, d, e \rangle$ . Семнадцатимерная квадратичная форма  $\langle a \rangle \perp \langle b, c, d, e \rangle$  — инвариант этой формы. Ассоциированная с ней пятнадцатимерная квадрака и есть  $Q$ .

Что дальше? Оказывается,  $\text{Bl}_{\text{Spin}_9/P_1}(\xi(F_4/P_4)) \simeq \text{Bl}_{\text{Spin}_9/P_4}(Q)$ . Для мотива раздутия есть формула вида

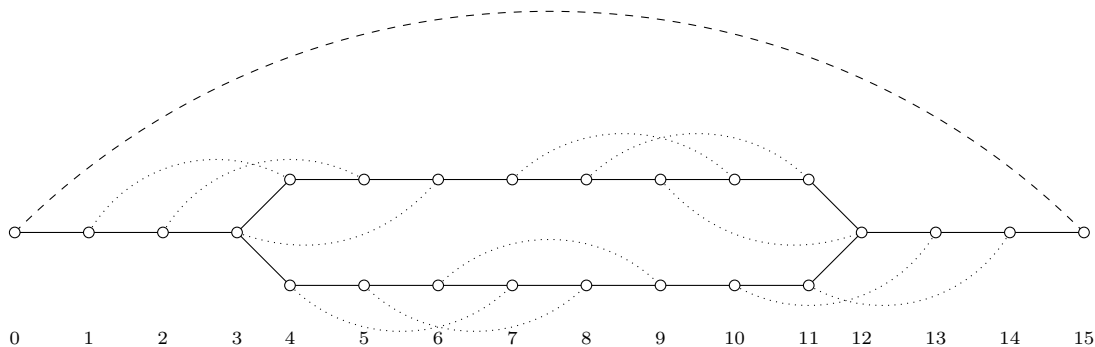
$$M(\text{Bl}_X(Y)) = M(Y) \oplus (M(X) \otimes M(\mathbb{P}(N_X Y)))\{\dots\}.$$



Мотив норменной квадрики раскладывается в один экземпляр мотива Роста  $R(\langle\langle a, b, c, d, e \rangle\rangle)$  (он как раз пятнадцатимерный) и  $R(\langle\langle b, c, d, e \rangle\rangle)$  в нужном количестве (7 штук):



Мотив норменной квадрики  $\mathrm{Spin}_9/P_1$  раскладывается в  $R(\langle\langle b, c, d, e \rangle\rangle)$  (1 штука) и мотивы Роста, соответствующие  $f_3$ . Многообразие  $\mathrm{Spin}_9/P_4$  расщепимо над общей точкой. Мотив  $\xi(\mathrm{F}_4/P_4)$  выглядит так:



Предположим, что у  $\xi(\mathrm{F}_4/P_4)$  есть точка над  $F'$ , где  $F'/F$  — расширение нечетной степени. Верно ли, что у него есть точка над  $F$ ? Если есть два проективных гладких многообразия  $Y_1, Y_2$ , которые бирационально эквивалентны, то  $Y_1(F) \neq \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $Y_2(F) \neq \emptyset$ . Теперь из  $\xi(\mathrm{F}_4/P_4)(F') \neq \emptyset$  следует, что  $Q(F') \neq \emptyset$ , и по теореме Спрингера  $Q(F) \neq \emptyset$ , откуда  $\xi(\mathrm{F}_4/P_4)(F) \neq \emptyset$ .

Мы получили картинку

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Bl}_{\mathrm{Spin}_9/P_1}(\xi(\mathrm{F}_4/P_4)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Bl}_{\mathrm{Spin}_9/P_4} Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ \xi(\mathrm{F}_4/P_4) & & Q \end{array}$$

### 3.12 Многообразия, клеточные над общей точкой

Вернемся к общей ситуации: по коциклу  $\xi \in H^1(F, G)$ , где  $G$  — расщепимая группа, и простому числу  $p$  мы построили набор чисел  $J_p(\xi) = (j_1, \dots, j_r)$ . Теорема Зайнуллина–Петрова–Семенова 3.8.5 утверждает, что если  $X$  —  $\xi G$ -однородное многообразие, клеточное над  $F(X)$ , то  $M(X) \otimes \mathbb{Z}/p = \bigoplus R_p(G)\{\dots\}$ , и

$$P(R_p(G), t) = \prod \frac{1 - t^{p^{j_i} d_i}}{1 - t^{d_i}}.$$

**Замечание 3.12.1.** При помощи знания  $J_p(\xi)$  для всех  $p$  можно описать все такие  $X$ .

Выше мы встречали точную последовательность вида

$$\mathrm{CH}^*(BB) \rightarrow \mathrm{CH}^*(G/B) \rightarrow \mathrm{CH}^*(G) \rightarrow 0.$$

Пусть  $X = {}_\xi(G/P)$ . Попробуем нарисовать аналогичную последовательность для  $P$ :

$$\begin{array}{c} \mathrm{CH}^*(BP) \\ \downarrow \\ \mathrm{CH}^*(G/P) \longrightarrow \mathrm{CH}^*(G) \longrightarrow \mathrm{CH}^*(P) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Нижняя строка этой диаграммы является точной последовательностью градуированных колец. Однако, точность всей последовательности в члене  $\mathrm{CH}^*(G/P)$  неизвестна. При этом  $\mathrm{CH}^*(P) \simeq \mathrm{CH}^*(L)$  (поскольку  $P/U \simeq L$ , а  $U$  аффинно). Более того, мы утверждаем, что  $\mathrm{CH}^*(L) \simeq \mathrm{CH}^*([L, L])$ . Почему это так? Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{CH}^*(BB_L) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*(L/B) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*(L) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow & & \\ \mathrm{CH}^*(BB_{[L,L]}) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*(L/B) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*([L, L]) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Здесь  $B_L$  обозначает борелевскую подгруппу в  $L$ , а  $B_{[L,L]}$  — борелевскую в  $[L, L]$ . Левая вертикальная стрелка не обязана быть изоморфизмом, однако образы  $\mathrm{CH}^*(BB_L)$  и  $\mathrm{CH}^*(BB_{[L,L]})$  в  $\mathrm{CH}^*(L/B)$  совпадают. Это утверждение достаточно проверить на  $\mathrm{CH}^1$ .

Обозначим  $H = [L, L]$ . Мы получили точную последовательность

$$\mathrm{CH}^*(G/P)/p \rightarrow \mathrm{CH}^*(G)/p \xrightarrow{\varphi} \mathrm{CH}^*(H)/p \rightarrow 0.$$

Нам известно, что  $\mathrm{CH}^*(G)/p = (\mathbb{Z}/p)[x_1, \dots, x_r]/(x_i)^{p^{k_i}}$  и  $\mathrm{CH}^*(H)/p = (\mathbb{Z}/p)[y_1, \dots, y_s]/(y_j)^{p^{l_j}}$ .

Оказывается, есть отображение  $\sigma: \{1, \dots, s\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$  такое, что

$$\varphi(x_{\sigma(m)}) = c \cdot y_m + \text{члены меньшего порядка},$$

где  $c \in (\mathbb{Z}/p)^*$  — некоторая константа.

**Теорема 3.12.2.** Пусть  $G$  — простая расщепимая группа,  $\xi \in H^1(F, G)$ ,  $X = {}_\xi(G/P)$ ,  $Y = {}_\xi(G/B)$ . Тогда следующие условия эквивалентны.

1.  $X$  — клеточное над общей точкой.
2. Композиция отображений

$$\mathrm{CH}^*({}_\xi(G/B)) \xrightarrow{\text{res}} \mathrm{CH}^*(G/B) \rightarrow \mathrm{CH}^*(G) \rightarrow \mathrm{CH}^*(P)$$

сюръективна.

3. Для любого простого  $p$  выполняются условия

- (a)  $j_{\sigma(m)}(\xi) = 0$ , если  $m$  такое, что  $\deg(y_m) > 1$ ;
- (b) композиция отображений

$$\mathrm{CH}^1({}_\xi(G/B))/p \xrightarrow{\text{res}} \mathrm{CH}^1(G/B)/p \rightarrow \mathrm{CH}^1(G)/p \rightarrow \mathrm{CH}^1(P)/p$$

сюръективна.

**Пример 3.12.3.** Пусть  $\xi \in H^1(F, E_7)$ ,  $X = {}_\xi(E_7/P_7)$ . Когда  $X$  расщепимо над общей точкой?

- $p = 2$ . В этом случае

$$\begin{array}{c} \mathrm{CH}^*(E_7)/2 = (\mathbb{Z}/2)[x_1, x_2, x_3, x_4]/(\dots) \\ \text{deg: } \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & 9 \end{array} \\ \downarrow \\ \mathrm{CH}^*(E_6)/2 = (\mathbb{Z}/2)[y_1]/(y_1^2) \\ \text{deg: } \begin{array}{c} 3 \end{array} \end{array}$$

Условие (3b) теоремы 3.12.2 превращается в  $j_2 = 0$ . Элементы  $x_3, x_4$  получаются операцией Стиррода, и потому  $j_3 = j_4 = 0$  автоматически.

- $p = 3$ . В этом случае

$$\begin{array}{c} \mathrm{CH}^*(E_7)/3 = (\mathbb{Z}/3)[x_1]/(x_1^3) \\ \deg: \quad \downarrow 4 \\ \mathrm{CH}^*(E_6)/3 = (\mathbb{Z}/3)[y_1]/(y_1^3) \\ \deg: \quad \downarrow 4 \end{array}$$

Условие состоит в том, что  $j_1 = 0$ ; и тогда весь  $j$ -инвариант для модуля 3 равен нулю.

Задача: посчитать  $j_2$  для компактной формы  $E_7$  над  $\mathbb{R}$ . Эквивалентно:

$$\begin{array}{l} \text{верно ли, что над полем } \mathbb{R}(\mathrm{SB}(\mathbb{H})) \text{ (которое изоморфно } \mathrm{Frac}(\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1))) \\ \text{компактная форма } E_7 \text{ расщепляется?} \end{array} \quad (1)$$

Еще одна эквивалентная формулировка: пусть  $R_2(\xi)$  — мотив Роста, отвечающий кватернионам. Сравним  $\xi(E_7/P_7)$  и  $\mathrm{SB}(\mathbb{H})$ . Над  $F(\xi(E_7/P_7))$  алгебра Титса  $(\mathbb{H})$  тривиальна, и потому  $\mathrm{SB}(\mathbb{H})$  приобретает рациональную точку. Если условие 1 выполняется, то верно и обратное: над  $F(\mathrm{SB}(\mathbb{H}))$  многообразие  $\xi(E_7/P_7)$  имеет рациональную точку. Почему это так?

**Теорема 3.12.4.** Пусть  $X, Y$  — проективные однородные многообразия (возможно, относительно разных групп),  $p$  — простое число. Предположим, что  $X_{F(Y)}$  и  $Y_{F(X)}$  имеют рациональные точки. Тогда  $M(X) \otimes (\mathbb{Z}/p)$  и  $M(Y) \otimes (\mathbb{Z}/p)$  имеют общее слагаемое, «задевающее» точку (то есть,  $q \in \mathrm{CH}^{\dim X}(X \times X)$  — проектор, и  $\mathrm{im}(q)$  над замыканием содержит  $\mathrm{pt} \in \mathrm{CH}^{\dim X}(X)$ ).

**Утверждение 3.12.5.** Если есть изотропная  $\xi G$ , и анизотропное ядро типа  $H$ , то  $\xi$  приходит из  $\zeta \in H^1(F, H)$ . Тогда  $J_p(\xi)$  выражается через  $J_p(\zeta)$ :

$$j_i(\xi) = \begin{cases} j_m(\zeta), & \text{если } i = \sigma(m) \text{ для некоторого } m; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поэтому имеет смысл считать  $J_p(\xi)$  только для анизотропных групп (то есть, над  $\mathbb{R}$  — только для компактных форм).

- $G_2, F_4$ :  $(\mathbb{Z}/2)[x_1]/(x_1^2)$ ,  $J_2(\xi) = (1)$  — а не 0, ибо у  $\mathbb{R}$  нет расширений нечетной степени. При этом  $R_2(\xi)$  — мотив Роста  $\langle -1, -1, -1 \rangle$ .
- $E_6$ : компактная форма есть, но она внешняя.
- $E_7$ :  $(\mathbb{Z}/2)[x_1, x_2, x_3, x_4]$ .  
deg:  $\begin{smallmatrix} & & & & \\ & & & & \\ 1 & 3 & 5 & 9 \end{smallmatrix}$

**Утверждение 3.12.6.** В этом случае  $J_2(\xi) = (1, 0, 0, 0)$ ,  $R_2(\xi)$  — это мотив Роста квадрики  $\langle -1, -1 \rangle$ .

Для доказательства этого утверждения нужен **инвариант Роста**.

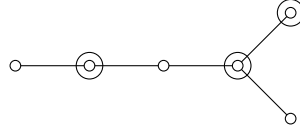
### 3.13 Инвариант Роста

Пусть  $G$  — простая, односвязная, но не обязательно расщепимая группа. Тогда есть инвариант

$$r: H^1(F, G) \rightarrow H^3(F, (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})(2)) = \varinjlim_N H^3(F, \mu_N^{\otimes 2}),$$

который порождает всю абелеву группу таких инвариантов. Вместо предела в правой части можно взять одно достаточно большое  $N$ . Заметим, что  $r(\xi)$  всегда лежит в кручении. Посмотрим на наименьшее  $N_G$  такое, что всегда  $N_G \cdot r(\xi) = 0$  (для всех расширений  $E/F$  и для всех  $\xi$ ). Тогда  $N_G$  зависит только от типа  $G$ . А именно, для исключительных групп  $N_{G_2} = 2$ ,  $N_{F_4} = N_{E_6} = 6$ ,  $N_{E_7} = 12$ ,  $N_{E_8} = 60$ . Для  $G_2$  мы это видели:  $G_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ , и  $\mathbb{O}$  определяется формой  $\langle a, b, c \rangle \in H^3(F, \mathbb{Z}/2)$ . Для  $F_4, E_6$ :  $f_3 = 3r \in H^3(F, \mathbb{Z}/2)$ ,  $g_3 = 2r \in H^3(F, \mathbb{Z}/3)$ , где  $r \in H^3(F, \mathbb{Z}/6)$ .

**Упражнение 3.13.1** (Исследовательская задача). Придумать формулу для  $r: H^1(F, G) \rightarrow H^3(f, \mathbb{Z}/4)$ , где  $G$  — односвязная группа типа  $D_6$  с индексом Титса



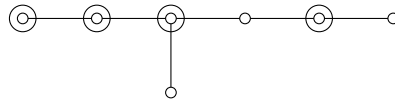
Такая группа задается кватернионами.

**Теорема 3.13.2** (Черноусов–Гарибальди). Если  $G$  — расщепимая группа типа  $G_2, F_4, E_6$  или  $E_7$ , то ядро инварианта Роста тривиально.

Пусть  $\xi \in H^1(F, G)$ . Хотим узнать, тривиален ли  $\xi$ . Теорема Черноусова–Гарибальди говорит, что (оказывается!) достаточно посчитать  $r(\xi)$ . Для  $E_8$  это неверно: можно взять  $\xi \in H^1(\mathbb{R}, E_8)$ , задающий компактную форму.

Воспользуемся этой теоремой для доказательства утверждения 3.12.6. Достаточно доказать, что  $\xi_{F(SB(\mathbb{H}))} = *$ . Действительно, если это так, то  $\xi(E_7/B)$  и  $SB(\mathbb{H})$  имеют рациональные точки над полями функций друг друга. Тогда у них есть общее мотивное слагаемое  $R_2(\xi) = R_2(\langle\langle -1, -1 \rangle\rangle)$ , и потому  $J_2(\xi) = (1, 0, 0, 0)$  из формулы для полинома Пуанкаре.

Мы должны представить  $\xi$  как элемент  $H^1(F, G')$ , где  $G'$  односвязна. Расщепимая  $G'$  не подойдет:  $\xi$  приходит из  $H^1(F, E_7^{\text{ad}})$ , но не из  $H^1(F, E_7^{\text{sc}})$  (поскольку алгебра Титса нетривиальна). Возьмем в качестве  $G'$  группу с индексом Титса



Тогда  $\xi \in H^1(F, G')$ . Что можно сказать про  $r(\xi)$ ? Мы знаем, что  $\xi$  расщепим над  $\mathbb{C}$ , и потому  $2r(\xi) = 0$ . Стало быть,  $r(\xi) \in H^3(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$ . Значит, это либо 0, либо  $\langle\langle -1, -1, -1 \rangle\rangle$ .

Переходим на  $F(SB(\mathbb{H}))$ . Тогда  $r(\xi)$  в любом случае становится 0, а  $G'_{F(SB(\mathbb{H}))}$  расщепима. Поэтому можно применить теорему Черноусова–Гарибальди, и заключить, что  $\xi_{F(SB(\mathbb{H}))} = *$ , чего мы и добивались.

Посмотрим теперь на компактную форму группы типа  $E_8$ . Мы знаем, что

$$CH^*(E_8)/2 = (\mathbb{Z}/2)[x_1, x_2, x_3, x_4] / (\dots).$$

deg:     3     5     9     15

Инвариант Роста равен нулю;  $j_1 = 0$ , и потому  $j_2 = j_3 = 0$ . Получаем, что  $J_2(\xi) = (0, 0, 0, 1)$ . Отсюда следует, что  $P(R_2(\xi), t) = 1 + t^{15}$  и  $R_2(\xi) = R_2(\langle\langle -1, -1, -1, -1 \rangle\rangle)$ .

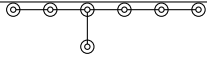
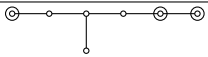
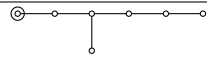
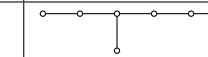
Мораль: над  $\mathbb{R}$  мотивы однородных проективных многообразий (расщепимых над общей точкой) раскладываются в мотивы Роста от пфистеровых форм с каким-то количеством  $-1$ ; количество зависит от типа группы.

Пусть  $\xi \in H^1(F, G)$ , где  $G$  — расщепимая группа типа  $E_6$ . Свяжем  $J$ -инвариант с индексом Титса. Например,  $J_3(\xi)$  определяется индексом Титса над ко-3-замыканием поля  $F$ .

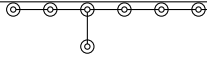
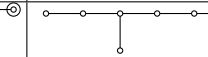
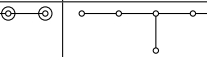
Что это значит? Посмотрим на абсолютную группу Галуа  $\text{Gal}(\bar{F}/F)$  и возьмем в ней 3-силовскую подгруппу. Ей соответствует расширение  $E/F$ , которое называется **ко-3-замыканием**  $F$ . Неформально говоря, мы игнорируем расширения степеней, не делящихся на 3.

$J_3(E_6^{\text{ad}})$	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(2, 1)
индекс Титса					
индекс алгебры Титса	1	3	1	3	9 или 27

Приведем аналогичную таблицу для  $J_2(E_7^{\text{sc}})$ :

$J_2(E_7^{\text{sc}})$	$(0, 0, 0)$	$(1, 0, 0)$	$(1, 1, 0)$	$(1, 1, 1)$
индекс Титса над ко-2-замыканием				
$r(\xi)$	0	чистый символ $\neq 0$ из $H^3(F, \mathbb{Z}/2)$ : $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$	сумма двух символов из $H^3(F, \mathbb{Z}/2)$ с общим слотом: $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle + \langle\langle a, d, e \rangle\rangle$	иначе

Случаи  $E_6 \pmod{2}$ ,  $E_7 \pmod{3}$  — легкие упражнения. Случаи  $E_8 \pmod{2}$ ,  $E_7^{\text{ad}} \pmod{2}$  — исследовательское упражнение. Случай  $E_8 \pmod{5}$  — легкое упражнение. Вот ответ для  $E_8 \pmod{3}$ :

$J_3(E_8)$	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
индекс Титса			
$r(\xi)$	0	чистый символ $\neq 0$ из $H^3(F, \mathbb{Z}/3)$	иначе