Мотивы Воеводского и арифметика линейных алгебраических групп *

Иван Панин Виктор Петров

2012

1 Введение

1.1 Планы

Работа Панина и Пименова о квадратичных формах.

Простая формулировка. *Пусть* $K = \mathbb{C}(z_1, \dots, z_n)$ *и* $R := \{\frac{g(z)}{h(z)} \mid h(0) \neq 0\} \subset K$ *— регулярные функции в окрестности* 0. *Пусть* $u \in R^{\times}$. *Рассмотрим уравнение*

$$T_1^2 + \dots + T_k^2 = u.$$

(Предполагаем $k \geq 2$.*) Если уравнение имеет решение в* K, *то оно имеет решение и в* R.

Интересующая нас задача: классифицировать простые алгебраические группы над произвольным полем (или локальным регулярным кольцом). В каком смысле — мы объясним. Что такое простые алгебраические группы — это обсуждается в записках спецкурса.

Как все знают, над алгебраически замкнутыми полями классификацию простых алгебраических групп дают диаграммы Дынкина. Среди них — четыре бесконечные серии, которым соответствуют следующие присоединенные группы:

- A_n — PGL_{n+1}.
- B_n — SO_{2n+1}.
- C_n — PGSp_{2n}.
- D_n — SO_{2n}.

Исключительные группы: E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.

Имеется точная последовательность

$$1 \to \mu_n \to \mathrm{SL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1.$$

«Теорема типа Спрингера»: *пусть* G *и* G' *— группы типа* G_2 *над полем* K. *Пусть расширение* $[L : K]$ *нечетное. Тогда если* $G_L \simeq G'_L$, *то* $G \simeq G'$.

С точностью до каких-то тонкостей, имеем

$$H^1(K, G_0^{ad}) \approx \{\text{присоед. простые алг. группы над } K \text{ того же типа, что и } G_0\}.$$

Это соответствие функториально в том смысле, что расширение полей L/K индуцирует морфизм $H^1(K, G^{ad}) \to H^1(L, G^{ad})$.

*Конспект лекций семинара весны 2012 года; предварительная версия. Автор TeX-версии — Александр Лузгарев. Основано на конспекте Алексея Бешенова первых двух лекций.

Наша высокая цель — построить функтор F, сопоставляющий полям абелевы группы с гомоморфизмом следа, так что конечное расширение $[L : K]$ давало бы морфизм $F(L) \to F(K)$ и естественное преобразование

$$H^1(K, G_0^{ad}) \to F(K).$$

Например, для $G_0 = \mathrm{PGL}_2 = \mathrm{Aut}(M_2)$ ответ такой:

$$F\colon K \rightsquigarrow K_2^M(K)/2,$$

где $K_2^M(K) = I^2(K)/I^3(K)$.

1.2 Теорема Меркурьева–Суслина и гипотеза Блоха–Като

Пусть A — центральная простая алгебра над полем K (более общее понятие — **алгебра Азумайи**, **Azumaya algebra**). Ей соответствует элемент $[A]$ в группе Брауэра $\mathrm{Br}(K)$.

- **Теорема Меркурьева** (1981) — изоморфизм ${}_2\,\mathrm{Br}(K) \simeq K_2^M/2$, а также следствие про $[A] \in {}_2\,\mathrm{Br}(K)$.

  [http://www.mathunion.org/ICM/ICM1986.1/Main/icm1986.1.0389.0393.ocr.pdf]

  [http://www.math.ethz.ch/~knus/sridharan/merkurjev84.pdf]

- **Теорема Меркурьева–Суслина** (1982) — изоморфизм ${}_p\,\mathrm{Br}(K) \simeq K_2^M/p$.

  [L.H. Rowen, Ring theory, Vol. 2, §7.2]

- **Гипотеза Блоха–Като** («norm residue isomorphism theorem») — $K_n^M/p(-) \simeq H^n_{\text{ét}}(-, \mu_p^{\otimes n})$.

  [http://arxiv.org/abs/0805.4430]

1.3 Кольцо Гротендика–Витта

$H^1(K, \mathrm{O}_n)$ — это классы изометрии невырожденных квадратичных форм ранга n.

Имеется функтор в кольцо Витта

$$H^1(K, \mathrm{O}_n) \to W(K), \quad f \mapsto [f].$$

Разберемся, что такое **кольцо Витта** $W(K)$. Его образующие — классы изометрии квадратичных форм над K, а соотношения выглядят так:

$$[f] + [g] = [f \perp g],$$
$$[f] \cdot [g] = [f \otimes g],$$
$$\mathbb{H} = 0,$$

где $\mathbb{H}$ — класс изометрии двумерной квадратичной формы $f(x, y) = xy$, а $f \perp g$ имеет следующий смысл. Если f — квадратичная форма на V, а g — квадратичная форма на W, то на $V \oplus W$ задается квадратичная форма $(f \perp g)(u \oplus v) := f(u) + g(v)$.

Имеется корректно определенный гомоморфизм

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}\colon W(K) &\to \mathbb{Z}/2, \\ [f] &\mapsto \mathrm{rk}\, f \mod 2. \end{aligned}$$

$I := \ker \mathrm{rk}$ называется **фундаментальным идеалом**.

Кольцо Гротендика–Витта $GW(K)$ определяется следующим образом. В нем те же образующие, но нет условия $[xy] = 0$. Сначала определяется сложение и умножение, делающее $GW(K)$ полукольцом:

$$[f] + [g] = [f \perp g],$$
$$[f] \cdot [g] = [f \otimes g].$$

Потом мы берем группу Гротендика и получаем кольцо.

1.4 $\mathbb{A}^1$-гомотопии и гипотеза Мореля

[http://mathunion.org/ICM/ICM1998.1/Main/00/Voevodsky.MAN.ocr.pdf]

$\mathbb{A}^1$-гомотопическая категория пространств с отмеченными точками над K.

Сфера $S^0 = \{+, \bullet\}$ состоит из двух точек, из которых $\bullet$ — отмеченная.

Теорема Мореля (1999?) состоит в вычислении

$$\pi_0^{stab}(S^0) \simeq \mathrm{GW}(K)$$

Fabien Morel, On The Motivic π_0 of the Sphere Spectrum.
http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-0948-5_7

Желаемый функтор F мог бы давать $H^1(K, G) \to H_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\text{èt}}G)$.

Аналог этого в топологии следующий. Пусть задано главное G-расслоение $\mathfrak{g} \to X$ для клеточного пространства X. Сопоставим ему отображение в классифицирующее пространство $X \xrightarrow{f_{\mathfrak{g}}} BG$.

Существует соответствие между множеством классов изоморфности главных G-расслоений над X и гомотопическими классами $[X, BG]$.

Имеется инъекция

$$[X, BG] = \pi_0(\mathrm{Map}(X, BG)) \hookrightarrow H_0(\mathrm{Map}(X, BG)).$$

Гипотеза Мореля заключается в том, что в алгебраической ситуации тоже получается инъекция

$$[\operatorname{Spec} K, B^{\text{èt}}G] = \pi_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\text{èt}}G) \hookrightarrow H_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\text{èt}}G).$$

1.5 Формы Пфистера

Рассмотрим фильтрацию на кольце Витта

$$W(K) \supset I \supset I^2 \supset I^3 \supset \cdots$$

Теорема 1.5.1. $\bigcap_n I^n = \{0\}$.

Мы уже знаем, что $W(K)/I = \mathbb{Z}/2$. I/I^2 как абелева группа порождается элементами вида $\langle\langle a \rangle\rangle := x^2 - a\,y^2$ для некоторого $a \in K^\times$. Более общо, I^n/I^{n+1} порождается тензорными произведениями элементов

$$\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle = \langle\langle a_1 \rangle\rangle \otimes \cdots \otimes \langle\langle a_n \rangle\rangle.$$

$\langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$ называется **n-кратной формой Пфистера**.

Пример 1.5.2. При $n = 1$ имеем $a \in K^*/(K^*)^2$; $K(\sqrt{a})$ — квадратичное расширение.

При $n = 2$ символ $\langle\langle a, b \rangle\rangle$ есть норма алгебры кватернионов $H = (a, b)$ над K.

При $n = 3$ символ $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$ есть норма алгебры октонионов (a, b, c) над K (что соответствует группам типа G_2 над K).

Теорема 1.5.3 (Арасон)**.** *Если $[q] \in I^n$, то $\operatorname{rk} q \geq 2^n$. Если при этом $\operatorname{rk} q = 2^n$, то $q \simeq \alpha \cdot \langle\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\rangle$, где $\alpha \in K^\times$. В частности, $\bigcap I^n = 0$.*

- $e_0(q) := \operatorname{rk} q \mod 2$.
- Если $e_0 = 0$, то $[q] \in I$. Определим $e_1(q) := [\![q]\!] \in I/I^2$. Этому соответствует $\langle\langle a \rangle\rangle$, где a — дискриминант q (с точностью до знака?).
- Если $e_1 = 0$, то $e_2(q) := [\![q]\!] \in I^2/I^3$. Форме q можно сопоставить $C_0^+(q)$, четную положительную часть алгебры Клиффорда, это будет центральная простая алгебра. Имеем $[C_0^+(q)] \in {}_2\operatorname{Br}(K)$. По теореме Меркурьева, это сумма

$$[(a_1, b_1)]\,[(a_2, b_2)] \cdots [(a_k, b_k)]$$

$$\langle\langle a_1, b_1 \rangle\rangle + \langle\langle a_2, b_2 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle a_k, b_k \rangle\rangle.$$

- Если $e_2(q) = 0$, то можно определить $e_3(q)$ — **инвариант Арасона**.

1.6 Торсоры

Пусть G — простая алгебраическая группа над K.

G**-торсором** называется многообразие X над K, такое что

- определено действие $G \times X \to X$;
- над алгебраическим замыканием $\overline{K}$ имеется изоморфизм $X_{\overline{K}} \simeq G_{\overline{K}}$ (как многообразий с G-действием).

Раньше торсоры назывались «главными однородными пространствами» (principal homogeneous space).

Пример 1.6.1. Действие G сдвигами на себе дает **тривиальный** G**-торсор**.

По определению, $H^1(K;G)$ есть множество классов изоморфности G-торсоров с отмеченной точкой (тривиальный G-торсор).

Пример 1.6.2. Зафиксируем $a \in K$. Для каждой K-алгебры R положим $\mu_2(R) = \{x \in R \mid x^2 = 1\}$, $X(R) := \{y \in R \mid y^2 = a\}$. Получаем схемы μ_2 и X, причем μ_2 действует на X умножением: если $y^2 = a$, $x^2 = 1$, то $(x\,y)^2 = a$.

X — тривиальный G-торсор iff у него есть рациональная точка: $X(K) \neq \varnothing$.

Если G — абелева группа, то на торсорах имеется сложение. При этом $H^1(K, \mu_2) \simeq K^*/(K^*)^2$ как абелева группа. И вообще $H^1(K, \mu_n) \simeq K^*/(K^*)^n$.

1.7 Скрученные формы

Напомним, что $\mathrm{O}_{2n} = \mathrm{Aut}(q_{split})$, где $q_{split} = x_1\,y_1 + \cdots + x_n\,y_n$ — **расщепимая форма** (от переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

$H^1(K, \mathrm{O}_{2n})$ можно отождествить с множеством классов изометрии невырожденных квадратичных форм ранга $2n$. Действительно, пусть q — квадратичная форма, Мы утверждаем, что $\mathrm{Iso}(q_{split}, q)$ есть искомый торсор: на нем действует O_{2n}. Здесь $\mathrm{Iso}(\varphi, \psi)$ обозначает функтор изоморфизмов между квадратичными формами φ и ψ; более точно, $\mathrm{Iso}(\varphi, \psi)(R) = \{f \colon \varphi_R \to \psi_R \mid f \text{ — изоморфизм}\}$. Над алгебраически замкнутым полем q изоморфна q_{split}, и получается $\mathrm{Iso}(q_{split}, q_{split}) = \mathrm{Aut}(q_{split}) = \mathrm{O}_{2n}$.

Пусть A — некоторая алгебраическая структура над полем K (например, квадратичное пространство, конечномерная ассоциативная алгебра, конечномерная неассоциативная алгебра). Тогда **скрученная форма** A' для A есть такая структура над K, что при переходе к алгебраическому замыканию $A'_{\overline{K}} \simeq A_{\overline{K}}$.

Теорема. $H^1(K, \mathrm{Aut}(A))$ есть множество классов изоморфности скрученных форм A над K.

Изоморфизм такой:

$$A' \overset{\sim}{\longmapsto} \mathrm{Iso}(A, A').$$

На $\mathrm{Iso}(A, A')$ есть структура алгебраического многообразия.

Замечание. Пусть X — проективное многообразие над K. Теорема (Гротендик): *функтор* $U \mapsto \mathrm{Aut}_U(X \times U)$ *представим в схемах*; то есть, существует схема R такая, что $\mathrm{Aut}_U(X \times U)$ естественно изоморфно $\mathrm{Hom}(U, R)$.

Контрпример: $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ не конечномерно.

Пример: $A := M_n(K)$. $\mathrm{Aut}(A) = \mathrm{PGL}_n$.

$H^1(K, M_n(K))$ — это скрученные формы $M_n(K)$, то есть центральные простые алгебры размерности n^2, взятые с точностью до изоморфизма.

$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{n-1}) = \mathrm{PGL}_n = \mathrm{GL}_n / \mathbb{G}_m$.

Автоморфизмы сохраняют ранг.

$H^1(K, \mathrm{PGL}_n)$ есть множество скрученных форм $\mathbb{P}^{n-1}$ над K = **многообразия Севери–Брауэра**.

$$A \mapsto \mathrm{SB}(A) = \{\text{левые идеалы } I \trianglelefteq A \mid \dim_K(I) = n\}$$

Пример при $n = 2$: кватернионы $A = (a, b)$.

$\beta\, u + \gamma\, v + \delta\, u\, v$. Имеем векторное пространство u, v, uv. Условие {норма $= 0$} задает проективное подмногообразие в $\mathbb{P}^2$.

$x^2 - a\, y^2 - b\, z^2 = 0$ — коника.

$$\begin{aligned} \mathrm{PGL}_2 &\simeq \mathrm{SO}_3, \\ \{\text{кватернионы}\} &\simeq \{\text{формы ранга 3 с трив. дискриминантом}\}. \end{aligned}$$

1.8 Точные последовательности алгебраических групп

Точность последовательности алгебраических групп над K

$$1 \to C \to H \to G \to 1$$

означает следующее:

1. C — алгебраическая подгруппа в H.
2. После расширения скаляров $H(\overline{K}) \to G(\overline{K})$ является сюръекцией *над алгебраическим замыканием поля* K.
3. $C = \ker(H \to G)$, $C(R) = \ker(H(R) \to G(R))$.

Пример 1.8.1. Следующая последовательность алгебраических групп точна в указанном смысле:

$$1 \to \mu_2 \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 1,$$

где $\mathbb{G}_m(K) := \{(x, y) \in K^2 \mid x\, y = 1\}$, и отображение $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ есть $x \mapsto x^2$ (это сюръекция над алгебраическим замыканием).

Пример 1.8.2. Следующая последовательность точна:

$$\mu_2(K) \to K^\times \to K^\times \to H^1(K, \mu_2) \to H^1(K, \mathbb{G}_m) \to H^1(K, \mathbb{G}_m).$$

(Отображение $K^\times \to K^\times$ есть $x \mapsto x^2$.)

Теорема 1.8.3 (Теорема Гильберта 90)**.**

$$H^1(K, \mathbb{G}_m) = \{\bullet\},$$
$$H^1(K, \mathrm{GL}_n) = \{\bullet\}.$$

Из точности последовательности выше и теоремы 90 получается

$$H^1(K, \mu_2) \simeq K^\times/(K^\times)^2.$$

Пример 1.8.4. Точная последовательность

$$1 \to \mathrm{SL}_n \to \mathrm{GL}_n \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m \to 1.$$

приводит к последовательности

$$\mathrm{GL}_n(K) \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m(K) \to H^1(K, \mathrm{SL}_n) \to H^1(K, \mathrm{GL}_n).$$

Здесь $H^1(K, \mathrm{SL}_n) = \{\bullet\}$ и $H^1(K, \mathrm{GL}_n) = \{\bullet\}$.

Пример 1.8.5.

$$1 \to \mu_n \to \mathrm{SL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1.$$

$$\mu_n(K) \to \mathrm{SL}_n(K) \to \mathrm{PGL}_n(K) \to K^\times/(K^\times)^2 \to \{\bullet\} \to H^1(K, \mathrm{PGL}_n).$$

$$1 \to \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1.$$

Пример 1.8.6.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{SL}_n & \to & \mathrm{PGL}_n, \\ g & \mapsto & (x \mapsto g\,x\,g^{-1}) \in \mathrm{Aut}(M_n). \end{array}$$

Это сюръекция алгебраических групп, но не сюръекция на точках.

$$1 \to \mu_n \to \mathrm{SL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1.$$

Теорема 1.8.7. *Если имеется точная последовательность* $1 \to C \to H \to G \to 1$, *то возникает точная последовательность множеств с отмеченной точкой*

$$1 \to C(K) \to H(K) \to G(K) \to H^1(K, C) \to H^1(K, H) \to H^1(K, G).$$

См. книгу Серра «Когомологии Галуа».

1.9 Вторые когомологии

- Напомним, что $H^1(F, G)$ — множество G-торсоров. *Если G коммутативна*, то это аффинная алгебраическая группа.

  (Как в этом случае умножаются торсоры? — Что-то типа $E_1 * E_2 = (E_1 \times E_2)/((e_1, e_2) = (g\,e_1, g\,e_2))$.)

- $H^0(F, G)$ — это функтор $F \rightsquigarrow G(F)$, т.е. функтор точек. *Если G коммутативна*, то $H^i(F, G)$ можно определить как i-й производный функтор. При $i = 1$ это совпадает с первым определением.

Теорема 1.9.1. *Пусть имеется точная последовательность* $1 \to C \to G \to H \to 1$. *Предположим, что* $C \leq \mathrm{Cent}(G)$. *Тогда точная последовательность продолжается до вторых когомологий:*

$$1 \to C(F) \to G(F) \to H(F) \to H^1(F, C) \to H^1(F, G) \to H^1(F, H) \to H^2(F, C).$$

Пример 1.9.2. $H^2(F, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(F)$ — *группа Брауэра* поля F: она состоит из классов эквивалентности $[A]$ центральных простых алгебр A над F; умножение выглядит так: $[A] \cdot [B] = [A \otimes_F B]$.

Пусть X — квазипроективное многообразие. Тогда $H^2(X, \mathbb{G}_m)_{tors} = \mathrm{Br}(X)$ (*теорема Габбера* (Gabber)). (Загадочное замечание: подразумевается топология fppf, а для этальной топологии в определении торсора вместо $\overline{F}$ нужно взять F^{sep}.)

Пример 1.9.3 (Топологический аналог)**.** Пусть X — хорошее топологическое пространство (например, область в $\mathbb{R}^n$, многообразие или CW-комплекс).

Пусть G — топологическая группа (например, S^1, S^3, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$).

Имеется левое действие $G \times (G \times X) \to (G \times X)$, $g_1 \cdot (g_2, x) \mapsto (g_1\,g_2, x)$.

Левое действие послойно и свободно на скрученной форме $G \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$.

Для всех $x \in X$ возникает действие $G \times \mathcal{G}(x) \to \mathcal{G}(x)$. Здесь $\mathcal{G}(x) \simeq G$, и этот изоморфизм зависит от x.

$(\mathcal{G}, G \times \mathcal{G} \to \mathcal{G})$ в топологии называется **главным G-расслоением** (**principal G-bundle**).

$\mathcal{G}/G = X$.

Пример 1.9.4. $\mathbb{C}^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^1)$.

Пусть $L \to X$ — комплексное линейное расслоение, $z(X)$ — нулевое сечение.

Рассмотрим отображение $\mathbb{C}^\times \times (L - z(X)) \to (L - z(X))$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$. Имеем изоморфизм $L(x) - 0 \simeq \mathbb{C}^\times$, зависящий от x.

- Тогда $H^1(X, \mathbb{C}^\times)$ — классы изоморфизма $\mathbb{C}^\times$-торсоров над X. Они соответствуют линейным расслоениям над X: расслоению L соответствует описанный выше торсор $L - z(X)$, и по торсору $\mathcal{G}^\times$ можно построить расслоение $\mathcal{L}$.

- Таким образом, мы видим, что $H^1(X, \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^1))$ — это скрученные формы расслоения $\mathbb{C} \times X$ над X.

- Аналогично, $H^1(X, \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^n))$ — это (1) скрученные формы расслоения $\mathbb{C}^n \times X$ над X, то есть (2) векторные расслоения над X со слоем $\mathbb{C}^n$ (с точностью до изоморфизма).

- Пусть $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}, \sum u_i\, v_i)$ — автоморфизмы, сохраняющие квадратичную форму. Тогда

$$H^1(X, \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}, \sum u_i\, v_i))$$

  — это (1) скрученные формы расслоений вида $(\mathbb{C}^n \times X, \sum u_i, v_i) \to X$, то есть (2) векторные расслоения $E \to X$ со слоем $\mathbb{C}^n$ и с квадратичной формой в слоях.

- Рассмотрим $\mathrm{Aut}(M_n(\mathbb{C})) = \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$. Тогда $H^1(X, \mathrm{Aut}(M_n(\mathbb{C})))$ — это скрученные формы расслоений вида $M_n(\mathbb{C}) \times X \to X$. Например, по каждому расслоению $E \to X$ можно построить расслоение $\mathrm{End}(E) \to X$, и послойно $\mathrm{End}(E)(x) = \mathrm{End}(E(x))$. Но бывают и расслоения, не изоморфные никакому $\mathrm{End}(E) \to X$ — это нетривиальные топологические алгебры Адзумайи.

Имеется точная последовательность

$$1 \to \mathbb{C}^\times \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}) \to 1.$$

Отсюда получается точная последовательность

$$\begin{gathered} 1 \to \Gamma(X, \mathbb{C}^\times) \to \Gamma(X, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \to \Gamma(X, \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})) \to \\ \to H^1(X, \mathbb{C}^1) \to H^1(X, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \to H^1(X, \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})) \to H^2(X, \mathbb{C}^\times). \end{gathered}$$

Топологическая группа Брауэра есть $\mathrm{Br}_{top}(X) := H^2_{top}(X, \mathbb{C}^\times)$.

Пример 1.9.5. Мы утверждаем, что

$$H^2(X, S^1) \twoheadrightarrow H^3(X, \mathbb{Z})_{tors}.$$

Заметим, что $\mathbb{C}^\times \simeq S^1 \times \mathbb{R}$. Имеем точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to S^1 \to 0,$$

откуда получаем точную последовательность

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{R} \to H^2(X, S^1) \to H^3(X, \mathbb{Z}) \to H^3(X, \mathbb{R}) = H^3(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}.$$

Обозначим отображение $H^3(X, \mathbb{Z}) \to H^3(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ через α. Тогда связывающий гомоморфизм дает нам отображение $H^2(X, S^1) \to \ker(\alpha) = H^3(X, \mathbb{Z})_{tors}$.

На самом деле,

$$\mathrm{Br}_{top}(X) = H^3(X, \mathbb{Z})_{tors}.$$

Нечто такое написано как определение (у Серра? Гротендика?).

А какие нам известны нетривиальные скрученные формы алгебры $M_n(K)$? Так это и есть центральные простые алгебры.

Имеем точную последовательность $1 \to \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1$, откуда

$$H^1(F, \mathrm{GL})_n \to H^1(F, \mathrm{PGL}_n) \to H^2(F, \mathbb{G}_m).$$

При этом $H^1(F, \mathrm{GL})_n = \{\bullet\}$, и $H^1(F, \mathrm{PGL}_n)$ — центральные простые алгебры степени n. Это отображение дает изоморфизм

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Br}(F) & \simeq & H^2(F, \mathbb{G}_m), \\ A & \mapsto & [A]. \end{array}$$

Имеется точная последовательность

$$1 \to \mu_n \to \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m \to 1,$$

где $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ — отображение $x \mapsto x^n$.

Получаем точную последовательность

$$\begin{tikzcd} H^1(F, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^2(F, \mu_n) \arrow[r] & H^2(F, \mathbb{G}_m) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^2(F, \mathbb{G}_m) \arrow[d, equal] \\ \{\bullet\} & & \mathrm{Br}(F) \arrow[r, "\cdot n"] & \mathrm{Br}(F) \end{tikzcd},$$

откуда $H^2(F, \mu_n) = {}_n\,\mathrm{Br}(F)$.

Еще один пример: пусть $\operatorname{char} F \neq 2$. Имеется точная последовательность

$$1 \to \mathrm{SO}_n \to \mathrm{O}_n \xrightarrow{\det} \mu_2 \to 1.$$

Тогда

$$\mathrm{O}_n(F) \twoheadrightarrow \mu_2(F) \to H^1(F, \mathrm{SO}_n) \to H^1(F, \mathrm{O}_n) \xrightarrow{\mathrm{disc}} H^1(F, \mu_2) = F^*/(F^*)^2.$$

Отсюда $H^1(F, \mathrm{SO}_n)$ (невырожденные квадратичные формы дискриминанта 1) — подмножество в $H^1(F, \mathrm{O}_n)$ (невырожденные квадратичные формы ранга n с точностью до изометрии).

Это дает нам инвариант $\mathrm{disc} = e_1 \colon I \to I/I^2 \simeq F^*/(F^*)^2$.

Еще один пример:

$$1 \to \mu_2 \to \mathrm{Spin}_n \to \mathrm{SO}_n \to 1.$$

$$\mathrm{Spin}_n(F) \to \mathrm{SO}_n(F) \xrightarrow{N} H^1(F, \mu_2) \xrightarrow{0} H^1(F, \mathrm{Spin}_n) \to H^1(F, \mathrm{SO}_n) \xrightarrow{e_2} H^2(F, \mu_2).$$

Здесь

- $H^2(F, \mu_2) = {}_2\,\mathrm{Br}(F)$.
- N — **спинорная норма**. А именно, каждый элемент SO_n раскладывается в произведение отражений $g = S_{v_1} \cdots S_{v_{2k}}$; тогда $N(g) := q(v_1) \cdots q(q_{2k}) \pmod{(F^\times)^2}$.
- Отображение $\mathrm{Spin}_n(F) \to \mathrm{SO}_n(F)$ уже не обязательно является сюръективным.
- Мы не знаем, что такое $H^1(F, \mathrm{Spin}_n)$. Отображение $H^1(F, \mu_2) \to H^1(F, \mathrm{Spin}_n)$ равно 0 по теореме Эйхлера.

Самая правая стрелка в этой длинной последовательности дает нам инвариант $e_2 \colon I^2 \to I^2/I^3 = {}_2\,\mathrm{Br}(F)$. Его можно описать так: по форме q можно построить алгебру Клиффорда $C(q)$ с четной частью $C_0(q)$. Тогда e_2 сопоставляет форме $q \in I^2$ класс $[C_0^+(q)]$ в $\mathrm{Br}(F)$.

Пусть E — левый G-торсор, G действует на X справа. Рассмотрим скрученную форму X

$${}_E X := (X \times E)/(x, e) \sim (x\, g^{-1}, g\, e).$$

На ней действует ${}_E G$. Действительно, $E_G = \mathrm{Aut}_{G-\text{торс}}(E)$ — автоморфизмы E как G-торсора. ${}_E G$ является группой (тут G действует сопряжениями на себе).

Пример 1.9.6. Рассмотрим $H^1(F, \mathrm{O}_n)$.

$E \in H^1(F, \mathrm{O}_n)$ задается квадратичной формой q, и q должна быть формой расщепимой квадратичной формы q_0. При этом $E = \mathrm{Isom}(q_0, q)$.

$O(q_0)$ действует на квадрике $Q_0 := \{q_0 = x_1\, y_1 + \cdots + x_n\, y_n = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{2n-1}$.

После подкрутки: ${}_E Q_0 = \{q = 0\}$ и на ${}_E Q_0$ действует группа $O(q) = {}_E O(q_0)$.

1.10 Многообразия Севери–Брауэра

Пример 1.10.1. Рассмотрим $H^1(F, \mathrm{PGL}_n)$.

Торсор $E \in h^1(F, \mathrm{PGL}_n)$ задается центральной простой алгеброй A степени n: $E = \mathrm{Isom}_{F\text{-}\mathcal{Alg}}(M_n, A)$. Напомним, что $\mathrm{PGL}_n = \mathrm{Aut}(M_n)$.

Каждому вектору $v \in \mathbb{A}^n - \{0\}$ соответствует правый идеал $\{x \mid \mathrm{im}\, x \leq \langle v \rangle\}$ в M_n. Множество всех идеалов, получающихся таким образом — это в точности множество правых идеалов размерности n.

${}_E\mathbb{P}^{n-1}$ — Множество правых идеалов размерности n в A — **многообразие Севери–Брауэра** $\mathrm{SB}(A)$.

Уравнения:

$$\mathrm{SB}(A) := \{W \subset A \mid W \cdot A \subseteq A\}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{SB}(A) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(n, A) = \mathrm{Gr}(n, n^2).$$

$$\begin{tikzcd}
A \times \mathrm{SB}(A) & A \times \mathrm{Gr}(n, n^2) & \\
\tau|_{\mathrm{SB}(A)} \arrow[u, hook] \arrow[d] & \tau_n \arrow[u, hook] \arrow[d] & W \arrow[d] \\
\mathrm{SB}(A) \arrow[r, hook] & \mathrm{Gr}(n, n^2) & \{w\}
\end{tikzcd}$$

Лемма 1.10.2. $\mathrm{End}_{\mathrm{SB}(A)}(J_A) \simeq A$ *(эндоморфизмы расслоения).*

Поэтому два описания $H^1(F, \mathrm{PGL}_n)$ — как алгебры Адзумайи и как формы $\mathbb{P}^{n-1}$ — эквивалентны.

Утверждение 1.10.3. *Подрасслоение $\tau|_{\mathrm{SB}(A)}$ выдерживает правое A-действие на $A \times \mathrm{SB}(A)$.*

$J_A := \tau|_{\mathrm{SB}(A)}$.

Пример 1.10.4. $\mathrm{Gr}(K, n)$ (линейные k-мерные подпространства в $\mathbb{A}^n$).

Если U — k-мерное подпространство в $\mathbb{A}^n$, то $\{x \mid \mathrm{im}\, x \subseteq U\}$ — правый идеал в M_n размерности kn.

$\mathrm{SB}_k(A)$ — обобщенное многообразие Севери–Брауэра — многообразие правых идеалов размерности k.

$\mathrm{Gr}(k, n) \simeq \mathrm{Gr}(n-k, n)$ (напомним, что это не канонический изоморфизм). Аналог этой двойственности: $\mathrm{SB}_k(A) \simeq \mathrm{SB}_{n-k}(A^{op})$.

Утверждение 1.10.5. $\mathrm{SB}(A)(F) \neq \varnothing \Rightarrow A \simeq M_n$.

$\mathrm{SB}_k(A)(F) \neq \varnothing \Rightarrow \mathrm{ind}\, A \mid k$.

(Напомним, что такое ind. Для центральной простой алгебры A имеем $A \simeq M_m(D)$, где D — тело. $m \cdot \deg D = n$. $\deg D =: \mathrm{ind}\, A$, где $\deg D := \sqrt{\dim D}$.)

Скрученные формы $\mathbb{P}^{n-1}$ — это скрученные формы M_n. Имеем $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{n-1}) = \mathrm{PGL}_n$.

Предположим $\mathrm{char}\, F \neq 2$.

$\mathrm{Aut}(q_0) = O(q_0)$.

$\mathrm{Aut}(Q_0)^+ = \mathrm{PGO}(q_0)$, где Q_0 — квадрика $\{q = 0\}$.

$H^1(F, \mathrm{PGO}(q_0))$ — классы (A, σ) изоморфности центральных простых алгебр A с ортогональной инволюцией σ.

$$\{\text{правые идеалы } I \text{ в } (A, \sigma) \text{ размерности } \deg A \mid \sigma(I) \cdot I = 0\} =: X_{(A,\sigma)} \hookrightarrow \mathrm{SB}(A).$$

При поднятии до $\overline{F}$ получаем:

$$Q_{\sigma(q_{\overline{F}})} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\overline{F}}^{\deg A - 1} = \mathrm{SB}(A) \otimes_F \overline{F}.$$

Вложение $X_{(A,\sigma)} \hookrightarrow \mathrm{SB}(A)$ есть аналог вложения квадрики в проективное пространство.

2 Проективные однородные многообразия

2.1 Первые примеры

Еще раз про аналогию с топологией:

$E \to X$ — торсор на топологическом пространстве X, G действует на E. Существует покрытие $\{U_i\}$ пространства X такое, что

$$\begin{tikzcd} U_i \times G \simeq E|_{U_i} \arrow[r] \arrow[d] & E \\ U_i \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

У нас: возьмем $X = \operatorname{Spec} K$. Пусть $E \to \operatorname{Spec} K$ — торсор. Существует расширение полей L/K такое, что торсор $E_L \to \operatorname{Spec} L$ изоморфен торсору $G_L \to \operatorname{Spec} L$.

Мы хотим описать $H^1(K, G)$. Стратегия: для торсора E и (гладкого проективного) G-многообразия X мы определили ${}_E X$ — ${}_E G$-многообразие (снова гладкое проективное), которое называется *скрученной формой* X, то есть,

- $E_{\overline{K}} \simeq G_{\overline{K}}$ как $G_{\overline{K}}$-многообразие,
- $({}_E G)_{\overline{K}} \simeq G_{\overline{K}}$ как алгебраическая группа,
- $({}_E X)_{\overline{K}} \simeq X_{\overline{K}}$ как $G_{\overline{K}}$-многообразие.

Пример 2.1.1. Пусть $A \in H^1(K, \mathrm{PGL}_n)$; то есть, A — центральная простая алгебра степени n. Положим $E = \operatorname{Isom}(M_n, A)$, $X = \mathbb{P}^{n-1}$, $G = \mathrm{PGL}_n$. Тогда ${}_E G = \operatorname{Aut}(A)$, ${}_E X = \mathrm{SB}(A)$ — многообразие правых идеалов в A размерности n. Заметим, что $\mathrm{SB}(A)(K)$ непусто тогда и только тогда, когда $A \simeq M_n$. Вообще, свойства многообразия $\mathrm{SB}(A)$ отражают свойства исходного торсора.

Пример 2.1.2. Пусть $G = \mathrm{O}_n$, $q \in H_1(K, \mathrm{O}_n)$ — невырожденная квадратичная форма ранга n.

$E = \operatorname{Isom}(q_0, q)$, где q_0 расщепима (то есть, имеет вид $\langle 1, -1\rangle \perp \cdots \perp \langle 1, -1\rangle$ плюс, возможно, слагаемое $\langle 1\rangle$).

$X = \{q_0 = 0\}$ в проективном смысле. Тогда $Q = {}_E X = \{q = 0\}$. Заметим, что $Q(K)$ непусто тогда и только тогда, когда форма q изотропна, то есть, $q \simeq \langle 1, -1\rangle \perp q'$. Этот факт остается верным при любом расширении L/K: $Q(L)$ непусто тогда и только тогда, когда форма q_L изотропна.

Факт 2.1.3. Пусть q имеет вид $\langle\langle a_1, \ldots, a_k\rangle\rangle = \langle 1, -a_1\rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_k\rangle$. Тогда

Форма q_L изотропна тогда и только тогда, когда она расщепима (то есть,
раскладывается в сумму форм вида $\langle 1, -1\rangle$). (*)

Наоборот, если $\dim q$ четна и (*) выполнено для любого расширения полей, то q пфистерова с точностью до скаляра. Если же $\dim q$ нечетна, то $q \perp \langle 1\rangle$ пфистерова с точностью до скаляра.

Таким образом, от торсора E можно переходить к многообразию ${}_E X$ (и можно варьировать X), смотреть на его инварианты (в смысле алгебраической геометрии) и получать отсюда информацию об инвариантах торсора.

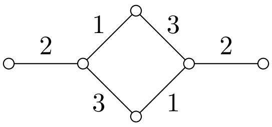
Пусть X — гладкое проективное многообразие. Мы ограничимся случаем, когда X *однородное*, то есть, $G(\overline{K})$ действует на $X(\overline{K})$ транзитивно (заметим, что это означает, что отображение $G \times X \to X \times X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$ сюръективно как пучок, а не в категорном смысле; категорное понятие эпиморфизма не подходит для наших целей: например, отображение $\operatorname{Spec} \mathbb{Q} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ сюръективно в категории схем). Неформально говоря, у G на X одна орбита. Тогда X называется **проективным однородным многообразием**.

Как строить проективные однородные многообразия? Пусть G — расщепимая группа, V — неприводимое представление (в положительной характеристике нужно действовать осторожене). Рассмотрим $\mathbb{P}(V)$ — многообразие прямых в V, проходящих через 0. У группы G есть ровно одна замкнутая орбита на $\mathbb{P}(V)$ — это и есть наше X. На самом деле, все проективные однородные многообразия так получаются (но не обязательно единственным образом).

Пример 2.1.4. $G = \mathrm{SL}_n$ действует на $V = K^n$ (имеется в виду обычное, *векторное* представление). Пусть u, v — два вектора. Можно ли найти g такое, что $\langle gu \rangle = \langle v \rangle$ (здесь через $\langle x \rangle$ мы обозначаем прямую, натянутую на x)? Ответ — можно, если u и v отличны от 0. Значит, в K^n есть две орбиты действия группы G: $\{0\}$ и $\{v \mid v \neq 0\}$. После проективизации в $\mathbb{P}(K^n) = \mathbb{P}^{n-1}$ остается только одна орбита.

Пример 2.1.5. $G = \mathrm{SL}_n$ действует на $V = \Lambda^k(K^n)$, $k = 1, \ldots, n-1$. На неразложимых поливекторых орбит много, но на разложимых действие транзитивно. Свойство «быть разложимым» определяется уравнениями Плюккера. Орбита в $\mathbb{P}(\Lambda^k(K^N))$ — это $\mathrm{Gr}(k, n)$.

Пусть, к примеру, $n = 4$, $k = 2$. Диаграмма Хассе весов нашего представления выглядит так:



Разложимый тензор задается двумя векторами. Запишем их в базисе (e_1, e_2, e_3, e_3): $(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) \wedge (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4)$. Обозначим координату тензора x при бивекторе $e_i \wedge e_j$ через x_{ij}. Тогда разложимость x равносильно обращению в 0 выражения $x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}$. Это следует, например, из соотношения на миноры матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$.

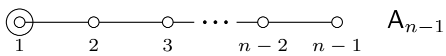
2.2 Параболические подгруппы

Оказывается, любое X, являющееся орбитой в $\mathbb{P}(V)$, задается квадратичными уравнениями в проективных координатах.

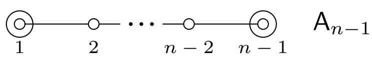
Пусть $v \in V$, $X = G \cdot \langle v \rangle$ — орбита вектора v. Тогда $\mathrm{Stab}_G(\langle v \rangle) = P$ — параболическая подгруппа в G. Проективное однородное многообразие задается подгруппой P с точностью до сопряженности.

Посмотрим, как тор T в G действует на вектор v. Из равенства $T\langle v \rangle = \langle v \rangle$ следует, что найдется $\lambda\colon T \to \mathbb{G}_m$ (**вес** неприводимого представления V) такое, что $tv = \lambda(t)v$ для всех $t \in T$. Представление задается своим старшим весом (точнее, орбитой веса относительно W, но в этой орбите есть единственный доминантный вес). Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — простые корни. Рассмотрим базис $\alpha_1^\vee, \ldots, \alpha_l^\vee$ в двойственном пространстве, где $\alpha_i^\vee$ определяется равенством $\alpha_i^\vee(\beta) = \frac{2(\alpha_i, \beta)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$. Пусть $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$ — двойственный к нему базис. Таким образом, $\frac{2(\alpha_i, \varpi)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \delta_{ij}$. Эти элементы $\varpi_1, \ldots, \varpi_l$ называются **фундаментальными весами**. Вес λ раскладывается по этому базису следущим образом: $\lambda = \sum m_i\omega_i$. После этого X (и P) зависит только от того, какие из m_i не равны 0. То есть, проективные однородные многообразия задаются подмножеством вершин на диаграмме Дынкина, состоящим из тех вершин, для которых $m_i \neq 0$. Мы будем их обводить на картинке.

Например, картинка для проективного пространства такая:



Это соответствует векторному представлению $V = V(\varpi_1)$ группы SL_n. Вообще, если на диаграмме A_{n-1} обвести вершину с номером k, получится $\mathrm{Gr}(k, n)$. Есть еще, например, присоединенное представление: SL_n действует на своей алгебре Ли $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n)$. Картинка для этого представления такая:



Первая вершина соответствует V, последняя — V^*, в итоге получаем $V^* \otimes V \simeq \mathrm{End}(V)$.

Если обведена одна вершина ($V = V(\varpi_i)$), то P называется **максимальной** параболической. Если все вершины обведены, то P называется **борелевской** (это минимальная среди параболических). Любая гладкая замкнутая подгруппа, содержащая B, называется **параболической** и получается таким образом: $B \leq P \leq G$.

Пусть теперь на диаграмме Дынкина системы A_{n-1} обведены вершины с номерами $k_1, \ldots, k_m$. Полученное многообразие можно описать в терминах стандартного представления $V = K^n$ группы

SL_n. А именно,
$$X = \{U_1 \leq \cdots \leq U_m \mid \dim U_i = k_i\}.$$
Такое X называется **многообразием флагов**. При этом SL_n действует на X транзитивно. Заметим, что тензорное произведение $V(\varpi_{k_1}) \otimes \cdots \otimes V(\varpi_{k_m} 0$ уже не обязано быть неприводимым, но можно взять кусок, соответствующий весу $\varpi_{k_1} + \cdots + \varpi_{k_m}$.

Так мы описали все однородные проективные многообразия для группы SL_n. В общем случае (для произвольной G) иногда однородное проективное многообразие называют **обобщенным флаговым многообразием**. Его можно описать так:
$$X = \{P' \leq G \mid P' \text{ сопряжена с } P\},$$
где значок $P' \leq G$ означает, что P' — гладкая замкнутая подгруппа в G. Более точно,
$$X(R) = \{P' \leq G_R \mid \text{существуют } S/R, g \in G(S): \ gP'g^{-1} = P\}.$$
После подкрутки на торсор E получаем
$${}_EX = \{P' \leq {}_EG \mid P'_{\overline{K}} \text{ сопряжена с } P_{\overline{K}} \text{ внутри } ({}_EG)_{\overline{K}} = G_{\overline{K}}\}.$$
Обратите внимание, что в ${}_EG$ никакой P может не оказаться.

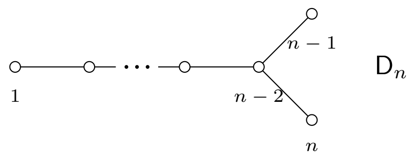
Проективное однородное многообразие X **изотропно**, если $X(K) \neq \varnothing$. Сама группа ${}_EG$ называется **изотропной**, если для какого-то проективного однородного многообразия ${}_EX$, отличного от точки, ${}_EX$ изотропно.

Пример 2.2.1. Пусть $G = \mathrm{PGL}_n$. Ее скрученная форма ${}_EG$ имеет вид $\mathrm{Aut}(A)$, а соответствующая скрученная форма проективного пространства — $\mathrm{SB}(A)$. Заметим, что у PGL_n (в отличие от SL_n) нет векторного представления. Почему? Для начала поймем, откуда берется скрученная форма SL_n. Отображение определителя $\det\colon \mathrm{GL}_n \to \mathbb{G}_m$ скручивается в *приведенную норму* (*reduced norm*)
$$\mathrm{Nrd}\colon A^* = \mathrm{GL}_1(A) \to \mathbb{G}_m.$$
Ядро этого отображения обозначается через $\mathrm{SL}_1(A) = \{g \in A \mid \mathrm{Nrd}(g) = 1\}$. Например, $(\mathrm{Nrd}(x))^n = \det(y \mapsto xy)$.

Решетка корней содержится в решетке весов:
$$\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_l \leq \mathbb{Z}\varpi \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varpi_l$$
Диаграммы Дынкина классифицируют расщепимые полупростые группы с точностью до изогении, а класс изоморфности внутри класса изогении задается промежуточной решеткой между этими двумя (с точностью до внешних автоморфизмов). Минимальная решетка $\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\alpha_l$ соответствует присоединенной группе (без центра); максимальная решетка $\mathbb{Z}\varpi_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varpi_l$ соответствует односвязной группе (у нее самый большой центр).

2.3 SO_{2n}

Посмотрим на однородные многообразия для SO_{2n}. Диаграмма Дынкина выглядит так:



Весу ϖ_1 отвечает квадрика $\{q(v) = 0\}$, что соответствует естественному представлению V группы SO_{2n}. Весу ϖ_2 — представление $\Lambda^2 V$. Соответствующее многообразие — множество вполне изотропных плоскостей $\langle u, v\rangle$, то есть, таких, что $q|_{\langle u,v\rangle} = 0$. Это условие можно описать так: $q(u) = q(v) = f(u, v) = 0$, где f — поляризация формы q: $f(u, v) = q(u + v) - q(u) - q(v)$. Аналогично (с помощью вполне изотропных подпространств различной размерности) описываются случаи $\varpi_3, \ldots, \varpi_{n-2}$.

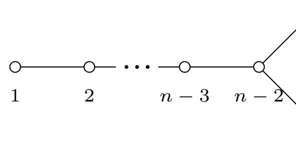
Весам ϖ_{n-1} и ϖ_n соответствуют вполне изотропные подпространства размерности n. Дело в том, что многообразие вполне изотропных подпространств размерности n имеет две компоненты связности. Для того, чтобы объяснить этот эффект, выберем базис $e_1, \dots, e_n, e_{-n}, \dots, e_{-1}$, относительно которого матрица Грама формы q имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оказывается, подпространства $\langle e_1, \dots, e_{n-1}, e_n\rangle$ и $\langle e_1, \dots, e_{n-1}, e_{-n}\rangle$ вполне изотропны, но не переводятся друг в друга действием SO_{2n}. Первое соответствует весу ϖ_{n-1}, а второе — весу ϖ_n. Куда же делось многообразие вполне изотропных подпространств размерности $n-1$? Оно не максимальное однородное (соответствует не максимальной параболической подгруппе), и соответствует весу $\varpi_{n-1} + \varpi_n$. Действительно,

$$\mathrm{Stab}(\langle e_1, \dots, e_{n-1}\rangle) = \mathrm{Stab}(\langle e_1, \dots, e_{n-1}, e_n\rangle) \cap \mathrm{Stab}(\langle e_1, \dots, e_{n-1}, e_{-n}\rangle).$$

Вообще, немаксимальные многообразия соответствуют флагам. Посмотрим на вес $\varpi_{i_1} + \dots + \varpi_{i_k}$. Флаг для него — это набор подпространств таких размерностей:



D_n

с правильной инцидентностью. А именно, для каждой из двух цепочек от первой вершины до двух последних инцидентность — это включение, а для весов ϖ_{n-1} и ϖ_n инцидентность означает, что пересечение соответствующих подпространств размерности n имеет размерность $n-1$.

Перед нами пример *геометрии*. Гораздо более простой пример — случай системы A_2. Там всего два фундаментальных веса: ϖ_1 соответствует точкам (и параболическим подгруппам типа ϖ_1), а ϖ_2 — прямым (и параболическим подгруппам типа ϖ_2). Более подробно, посмотрим на трехмерное векторное пространство F^3. Ненулевой вектор u порождает одномерное подпространство $\langle u\rangle \subseteq F^3$, и его стабилизатор $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_3}(\langle u\rangle)$ — это параболическая подгруппа типа ϖ_1:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \text{ — стабилизатор вектора } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для описания прямых можно воспользоваться двойственностью и перейти к пространству $(F^3)^*$. Ненулевой ковектор $\varphi \in (F^3)^*$ порождает одномерное подпространство $\langle\varphi\rangle \subseteq (F^3)^*$, и его стабилизатор $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_3}(\langle\varphi\rangle)$ — это параболическая подгруппа типа ϖ_2:

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \text{ — стабилизатор ковектора } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отношение инцидентности между ними такое: точка лежит на прямой тогда и только тогда, когда $\varphi(u) = 0$. В терминах параболических подгрупп: $\mathrm{Stab}(\langle u\langle \cap \mathrm{Stab}(\langle\varphi\rangle)$ содержит борелевскую подгруппу (то есть, параболическую подгруппу типа $\varpi_1 + \varpi_2$).

Если мы теперь посмотрим на геометрию, заданную абстрактными аксиомами проективной плоскости (с аксиомой Дезарга, обеспечивающей ассоциативность, но без аксиомы Паппа, обеспечивающей коммутативность), мы получим группу $\mathrm{SL}_1(A)$, где A — центральная простая алгебра степени 3.

2.4 Вычисление колец Чжоу

Пусть $E \in H^1(F, G)$, и задано однородное проективное G-многообразие X. Рассмотрим скрученное многообразие ${}_EX$; нас интересуют инварианты этого многообразия в смысле алгебраической геометрии. Например, $\mathrm{CH}^*({}_EX)$.

Вложение поля F в его алгебраическое замыкание $\overline{F}$ дает морфизм схем $\operatorname{Spec}\overline{F} \to \operatorname{Spec} F$. Пулбэком получается многообразие $X_{\overline{F}}$:

$$\begin{tikzcd}
X_{\overline{F}} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}\overline{F} \arrow[r] & \operatorname{Spec} F
\end{tikzcd}$$

Отсюда получаем гомоморфизм

$$\mathrm{CH}^*({}_EX) \to \mathrm{CH}^*(({}_EX)_{\overline{F}}) = \mathrm{CH}^*(X_{\overline{F}}).$$

Нас интересует образ этого гомоморфизма: кручение содержится в его ядре, за счет чего легче жить. Первый шаг — вычисление $\mathrm{CH}^*(X_{\overline{F}})$.

2.5 Пример: проективное пространство

Пример 2.5.1. Рассмотрим $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ с диагональным действием SL_{n+1}. Это действие не транзитивно: есть диагональ $\mathbb{P}^n$. Как выглядит дополнение к диагонали? Мы утверждаем, что оно расслаивается над $\mathrm{Gr}(1, 2; n+1)$ со слоем $\mathbb{A}^1$. Здесь $\mathrm{Gr}(1, 2; n+1)$ — многообразие флагов, состоящих из прямой и плоскости, в $(n+1)$-мерном пространстве.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n & & \mathbb{P}^n \arrow[hook', ll] \\
& \arrow[d, "\mathbb{A}^1"] & \\
& \mathrm{Gr}(1, 2; n+1) &
\end{tikzcd}$$

Это расслоение выглядит так: пара $(\langle u \rangle, \langle v \rangle) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ отправляется во флаг $\langle u \rangle \leq \langle u, v \rangle$. Прообраз флага при этом — это многообразие способов дополнить прямую до плоскости, то есть, $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^0 = \mathbb{A}^1$. Более строго, нужно говорить про расслоения на $\mathrm{Gr}(1, 2; n+1)$: есть двумерное векторное расслоение τ_2, сопоставляющее флагу $\langle u \rangle \leq \langle u, v \rangle$ плоскость $\langle u, v \rangle$, и есть одномерное векторное расслоение τ_1, сопоставляющее флагу $\langle u \rangle \leq \langle u, v \rangle$ прямую $\langle u \rangle$.

Теперь зафиксируем в этом описании u, то есть, возьмем слой всей картинки над точкой в первом сомножителе $\mathbb{P}^n$. Получим картинку

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^n & & \mathrm{pt} \arrow[hook', ll] \\
& \arrow[d, "\mathbb{A}^1"] & \\
& \mathrm{Gr}(1; n) &
\end{tikzcd}$$

Заметим, что $\mathrm{Gr}(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}$. Поэтому можно написать точную последовательность локализации:

$$\mathrm{CH}^{*-n}(\mathrm{pt}) \to \mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^n) \to \mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^{n-1}) \to 0.$$

Средняя стрелка является гомоморфизмом колец, а первый член почти всегда равен нулю. Поэтому

$$\mathrm{CH}^i(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathrm{CH}^i(\mathbb{P}^{n-1}), & i < n, \\ \mathbb{Z}, & i = n, \\ 0, & i > n. \end{cases}$$

По индукции получаем, что у $\mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^n)$ в каждой размерности от 0 до n стоит одна копия $\mathbb{Z}$.

Пример 2.5.2. Опишем другой способ. Пусть $\dim(V) = n+1$. Рассмотрим действие группы $\mathrm{SL}(V)$ (или $\mathrm{PGL}(V)$) на $\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V)$ (соответствующее весу $\varpi_1 + \varpi_n$). Там имеется подмногообразие $\{\varphi(u) = 0\}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V) & \{\varphi(u) = 0\} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\mathbb{A}^n"] \\ & \mathbb{P}(V^*) \end{tikzcd}$$

Зафиксировав φ, получаем

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n & \mathbb{P}^{n-1} \arrow[l, hook'] \\ \arrow[u, phantom] & \end{tikzcd} \qquad \mathbb{P}^n \xrightarrow{\mathbb{A}^n} \mathrm{pt}$$

Значит, имеется следующая точная последовательность локализации:

$$\mathrm{CH}^{*-1}(\mathbb{P}^{n-1}) \to \mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^n) \to \mathrm{CH}^*(\mathrm{pt}) \to 0.$$

Вычисление по индукции приводит к тому же результату, что и в предыдущем примере.

Факт 2.5.3. Если $Z \subseteq X$ — замкнутое подмногообразие, и $U = X \setminus Z$, имеется точная последовательность локализации

$$\mathrm{CH}^{*-\mathrm{codim}_X Z} \to \mathrm{CH}^*(X) \to \mathrm{CH}^*(U) \to 0,$$

где первое отображение — push-forward, а второе — pull-back (и является гомоморфизмом колец).

Пример 2.5.4. Тот же результат можно получить и прямым вычислением: понять, что компонента кольца Чжоу коразмерности i порождается классом подпространства $[\mathbb{P}^{n-i}]$, причем $[\mathbb{P}^n] = 1$. Кроме этого,

$$[\mathbb{P}^{n-1}]^i = \begin{cases} [\mathbb{P}^{n-i}], & i \leq n, \\ 0, & i > n. \end{cases}$$

Например, выбрав на $\mathbb{P}^n$ однородные координаты $[x_0 : \cdots : x_n]$, можно взять $\mathbb{P}^{n-1} = \{x_0 = 0\}$, другое $\mathbb{P}^{n-1} = \{x_1 = 0\}$ и обнаружить, что их пересечение равно $\{x_0 = x_1 = 0\} = \mathbb{P}^{n-2}$.

Замечание 2.5.5. По сути, в примере 2.5.2 мы нарисовали фильтрацию

$$\mathbb{P}^n \underset{\mathbb{A}^n}{\hookleftarrow} \mathbb{P}^{n-1} \underset{\mathbb{A}^{n-1}}{\hookleftarrow} \ldots \underset{\mathbb{A}^1}{\hookleftarrow} \mathrm{pt}$$

Вообще, если у многообразия X существует фильтрация замкнутыми подмногообразиями $S \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ такая, что $X_i \setminus X_{i+1} = \coprod \mathbb{A}^{k_i}$, то X называется **клеточным**. В этом случае

- все CH^i — свободные конечно порожденные абелевы группы (их ранг равен количеству клеток в соответствующей разности);
- $\mathrm{CH}(X)_i \simeq \mathrm{CH}(X_L)_i$ для любого расширения L/F.

2.6 Пример: многообразие Севери–Брауэра

Перейдем теперь к $\mathrm{SB}(D)$, где D — тело, $\operatorname{ind} D = n+1$. Это скрученная форма $\mathbb{P}^n$: $\mathrm{SB}(D) = {}_E\mathbb{P}^n$. В разделе 2.4 мы построили отображение

$$\mathrm{CH}^*(\mathrm{SB}(D)) \to \mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^n_F).$$

Циклы из его образа называются **рациональными** (по отношению к скручивающему торсору E). В разделе 2.5 мы вычислили правую часть: там стоит копия $\mathbb{Z}$ в каждой компоненте с номерами от 0 до n. Образующая компоненты коразмерности 0 всегда оказывается в образе.

Предположим, что класс [pt] оказался рационален. Это означает, что есть конечные (сепарабельные) расширения $L_1, \ldots, L_k$ такие, что

- над каждым L_i наше многообразие имеет рациональную точку;
- $\gcd_i([L_i : F]) = 1$.

Заметим, что первое условие равносильно тому, что $[D_{L_i}] = 0$ в $\mathrm{Br}(L_i) = 0$. Применим отображение трансфера $\mathrm{Br}(L_i) \to \mathrm{Br}(F)$. Получим, что $[L_i : F] \cdot [D] = 0$ в $\mathrm{Br}(F)$ для всех i. Из этого (а также из второго условия) следует, что $[D] = 0$ в $\mathrm{Br}(F)$.

2.7 Пример: квадрика

Рассмотрим квадрику $Q = \{q = 0\}$. В $Q \times Q = \{(\langle u\rangle, \langle v\rangle)$ есть подмножество $\{f(u,v) = 0\}$, а в нем — диагональ $\{\langle u\rangle = \langle v\rangle\} \simeq Q$. Получаем фильтрацию

$$\begin{tikzcd} Q \times Q & \{f(u,v)=0\} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\mathbb{A}^1"] & Q. \arrow[l, hook'] \\ & \mathrm{OGr}(1,2;f) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Q \times Q \arrow[r, phantom, ""] \arrow[d, "\mathbb{A}^{\dim Q}"] & \\ Q & \end{tikzcd}$$

Здесь $\mathrm{OGr}(1,2;f)$ означает многообразие флагов, состоящих из вполне изотропных подпространств вида $\langle u\rangle \leq \langle u, v\rangle$.

Расслоение $Q \times Q \setminus \{f(u,v) = 0\} \to Q$ устроено так: пара $(\langle u\rangle, \langle v\rangle)$ отправляется в $\langle u\rangle$. Проверим, что слой изоморфен $\mathbb{A}^{\dim Q}$. Пусть $u = e_1$. Тогда наше дополнение имеет вид $\{f(e_1, v) \neq 0\}$. Условие $f(e_1, v) \neq 0$ равносильно тому, что коэффициент у v при базисном векторе e_{-1} не равен 0. Поэтому можно читать, что он равен 1. Теперь все коэффициенты v, кроме тех, что стоят при e_1 и e_{-1}, можно брать какими угодно, а коэффициент при e_1 определяется однозначно из условия изотропности $q(v) = 0$. Иначе говоря, если τ — тавтологическое расслоение на Q, рассмотрим $(\tau^\perp)^*$. Его слой над точкой $\langle u\rangle \in Q$ равен $((\langle u\rangle)^\perp)^*$. Вот нужный нам изоморфизм:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{\dim Q} &\to \mathbb{P}((\langle u\rangle^\perp)^*) \setminus \mathbb{P}(\{\varphi \in (\langle u\rangle^\perp)^* \mid \varphi(u) = 0\}, \\ v &\mapsto (\varphi \colon w \mapsto f(v,w)). \end{aligned}$$

Расслоение $\{f(u,v) = 0\} \setminus Q \to \mathrm{OGr}(1,2;f)$ устроено проще: его слой равен $\mathbb{P}(\tau_2) \setminus \mathbb{P}(\tau_1) \simeq \mathbb{A}^1$, как и в примере 2.5.1.

Теперь зафиксируем u; получим фильтрацию

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, phantom, ""] & \{f(u,v)=0\} \arrow[l, hook'] \arrow[d, "\mathbb{A}^1"] & \mathrm{pt}, \arrow[l, hook'] \\ & Q' & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[d, "\mathbb{A}^{\dim Q}"] \\ \mathrm{pt} \end{tikzcd}$$

где Q' — квадрика размерности $\dim Q - 2$. Получаем точные последовательности

$$\begin{gathered} \mathrm{CH}^{*-1}(\{f(u,v)=0\}) \to \mathrm{CH}^*(Q) \to \mathrm{CH}^*(\mathrm{pt}) \to 0, \\ \mathrm{CH}^{*-\dim Q+1}(\mathrm{pt}) \to \mathrm{CH}^*(\{f(u,v)=0\}) \to \mathrm{CH}^*(Q') \to 0. \end{gathered}$$

Теперь при помощи индукции можно доказать следующее.

Пусть $\dim Q = n$ четно. Тогда $\mathrm{CH}^i(Q)$ — свободная абелева группа ранга 1 для всех $i = 0, \ldots, n$, кроме $i = n/2$; $\mathrm{CH}^{n/2}(Q) \simeq \mathbb{Z}^2$. Обозначим за $h = [Q''] \in \mathrm{CH}^1(Q)$ класс подквадрики коразмерности 1. Это гиперплоское сечение Q в общем положении. Тогда 1 — образующая $\mathrm{CH}^0(Q)$ h — образующая $\mathrm{CH}^1(Q)$, h^2 — образующая $\mathrm{CH}^2(Q), \ldots$. С другой стороны, pt — образующая $\mathrm{CH}^n(Q)$, $[\mathbb{P}^1]$ — образующая $\mathrm{CH}^{n-1}(Q)$, $[\mathbb{P}^2]$ — образующая $\mathrm{CH}^{n-2}(Q), \ldots$. Это классы изотропных подпространств соответствующих размерностей. Наконец, $h^{n/2}$ является суммой двух образующих; в качестве одной из них можно взять $[\mathbb{P}^{n/2}$.

Это можно увидеть в координатной записи: Q задается уравнением $x_1y_1 + \cdots + x_{n/2+1}y_{n/2+1} = 0$. После этого Q'' задается уравнением $x_{n/2+1} - y_{n/2+1} = 0$ (это гиперплоское сечение, как и было обещано), а следующие образующие задаются последовательным наложением уравнений $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, и так далее. Когда дойдем до коразмерности $n/2$, получим два варианта: либо

$$x_1 = \cdots = x_{n/2+1} = 0,$$

либо
$$x_1 = \cdots = x_{n/2} = y_{n/2+1} = 0.$$

Пример 2.7.1. Пусть $n = 4$, то есть, мы имеем дело с D_3. Перед нами четырехмерная квадрика. Ее уравнение выглядит так: $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$. Уравнения двух образующих в коразмерности $4/2 = 2$ выглядят так:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$
$$x_1 = x_2 = y_3 = 0.$$

Их пересечение имеет вид $x_1 = x_2 = x_3y_3 = 0$, что равносильно $x_1 = x_2 = 0$. Почему-то это условие равносильно $x_3 = y_3 = 0$.