

Мотивы Воеводского и арифметика линейных алгебраических групп *

Иван Панин

Виктор Петров

2012

1 Введение

1.1 Планы

Работа Панина и Пименова о квадратичных формах.

Простая формулировка. Пусть $K = \mathbb{C}(z_1, \dots, z_n)$ и $R := \{\frac{g(z)}{h(z)} \mid h(0) \neq 0\} \subset K$ — регулярные функции в окрестности 0. Пусть $u \in R^\times$. Рассмотрим уравнение

$$T_1^2 + \dots + T_k^2 = u.$$

(Предполагаем $k \geq 2$.) Если уравнение имеет решение в K , то оно имеет решение и в R .

Интересующая нас задача: классифицировать простые алгебраические группы над произвольным полем (или локальным регулярным кольцом). В каком смысле — мы объясним. Что такое простые алгебраические группы — это обсуждается в записках спецкурса.

Как все знают, над алгебраически замкнутыми полями классификацию простых алгебраических групп дают диаграммы Дынкина. Среди них — четыре бесконечные серии, которым соответствуют следующие присоединенные группы:

- A_n — PGL_{n+1} .
- B_n — SO_{2n+1} .
- C_n — PGSp_{2n} .
- D_n — SO_{2n} .

Исключительные группы: E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 .

Имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathrm{SL}_n \rightarrow \mathrm{PGL}_n \rightarrow 1.$$

«Теорема типа Спрингера»: пусть G и G' — группы типа G_2 над полем K . Пусть расширение $[L : K]$ нечетное. Тогда если $G_L \simeq G'_L$, то $G \simeq G'$.

С точностью до каких-то тонкостей, имеем

$$H^1(K, G_0^{ad}) \approx \{\text{присоед. простые алг. группы над } K \text{ того же типа, что и } G_0\}.$$

Это соответствие функториально в том смысле, что расширение полей L/K индуцирует морфизм $H^1(K, G^{ad}) \rightarrow H^1(L, G^{ad})$.

*Конспект лекций семинара весны 2012 года; предварительная версия. Автор Т_ЕХ-версии — Александр Лузгарев. Основано на конспекте Алексея Бешенова первых двух лекций.

Наша высокая цель — построить функтор F , сопоставляющий полям абелевы группы с гомоморфизмом следа, так что конечное расширение $[L : K]$ давало бы морфизм $F(L) \rightarrow F(K)$ и естественное преобразование

$$H^1(K, G_0^{ad}) \rightarrow F(K).$$

Например, для $G_0 = \mathrm{PGL}_2 = \mathrm{Aut}(M_2)$ ответ такой:

$$F: K \rightsquigarrow K_2^M(K)/2,$$

где $K_2^M(K) = I^2(K)/I^3(K)$.

1.2 Теорема Меркурьева–Суслина и гипотеза Блоха–Като

Пусть A — центральная простая алгебра над полем K (более общее понятие — **алгебра Азумаи**, *Azumaya algebra*). Ей соответствует элемент $[A]$ в группе Брауэра $\mathrm{Br}(K)$.

- **Теорема Меркурьева** (1981) — изоморфизм ${}_2\mathrm{Br}(K) \simeq K_2^M/2$, а также следствие про $[A] \in {}_2\mathrm{Br}(K)$.
[\[http://www.mathunion.org/ICM/ICM1986.1/Main/icm1986.1.0389.0393.ocr.pdf\]](http://www.mathunion.org/ICM/ICM1986.1/Main/icm1986.1.0389.0393.ocr.pdf)
[\[http://www.math.ethz.ch/~knus/sridharan/merkurjev84.pdf\]](http://www.math.ethz.ch/~knus/sridharan/merkurjev84.pdf)
- **Теорема Меркурьева–Суслина** (1982) — изоморфизм ${}_p\mathrm{Br}(K) \simeq K_2^M/p$.
[L.H. Rowen, Ring theory, Vol. 2, §7.2]
- **Гипотеза Блоха–Като** («norm residue isomorphism theorem») — $K_n^M/p(-) \simeq H_{\mathrm{\acute{e}t}}^n(-, \mu_p^{\otimes n})$.
[\[http://arxiv.org/abs/0805.4430\]](http://arxiv.org/abs/0805.4430)

1.3 Кольцо Гротендика–Витта

$H^1(K, \mathrm{O}_n)$ — это классы изометрии невырожденных квадратичных форм ранга n .

Имеется функтор в кольцо Витта

$$H^1(K, \mathrm{O}_n) \rightarrow W(K), \quad f \mapsto [f].$$

Разберемся, что такое **кольцо Витта** $W(K)$. Его образующие — классы изометрии квадратичных форм над K , а соотношения выглядят так:

$$\begin{aligned} [f] + [g] &= [f \perp g], \\ [f] \cdot [g] &= [f \otimes g], \\ \mathbb{H} &= 0, \end{aligned}$$

где \mathbb{H} — класс изометрии двумерной квадратичной формы $f(x, y) = xy$, а $f \perp g$ имеет следующий смысл. Если f — квадратичная форма на V , а g — квадратичная форма на W , то на $V \oplus W$ задается квадратичная форма $(f \perp g)(u \oplus v) := f(u) + g(v)$.

Имеется корректно определенный гомоморфизм

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}: W(K) &\rightarrow \mathbb{Z}/2, \\ [f] &\mapsto \mathrm{rk} f \pmod{2}. \end{aligned}$$

$I := \ker \mathrm{rk}$ называется **фундаментальным идеалом**.

Кольцо Гротендика–Витта $GW(K)$ определяется следующим образом. В нем те же образующие, но нет условия $[xy] = 0$. Сначала определяется сложение и умножение, делающее $GW(K)$ полукольцом:

$$\begin{aligned} [f] + [g] &= [f \perp g], \\ [f] \cdot [g] &= [f \otimes g]. \end{aligned}$$

Потом мы берем группу Гротендика и получаем кольцо.

1.4 \mathbb{A}^1 -гомотопии и гипотеза Мореля

[<http://mathunion.org/ICM/ICM1998.1/Main/00/Voevodsky.MAN.ocr.pdf>]

\mathbb{A}^1 -гомотопическая категория пространств с отмеченными точками над K .

Сфера $S^0 = \{+, \bullet\}$ состоит из двух точек, из которых \bullet — отмеченная.

Теорема Мореля (1999?) состоит в вычислении

$$\pi_0^{stab}(S^0) \simeq \mathrm{GW}(K)$$

Fabien Morel, On The Motivic π_0 of the Sphere Spectrum.

http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-0948-5_7

Желаемый функтор F мог бы давать $H^1(K, G) \rightarrow H_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\mathrm{et}}G)$.

Аналог этого в топологии следующий. Пусть задано главное G -расслоение $\mathfrak{g} \rightarrow X$ для клеточного пространства X . Сопоставим ему отображение в классифицирующее пространство $X \xrightarrow{f_{\mathfrak{g}}} BG$.

Существует соответствие между множеством классов изоморфности главных G -расслоений над X и гомотопическими классами $[X, BG]$.

Имеется инъекция

$$[X, BG] = \pi_0(\mathrm{Map}(X, BG)) \hookrightarrow H_0(\mathrm{Map}(X, BG)).$$

Гипотеза Мореля заключается в том, что в алгебраической ситуации тоже получается инъекция

$$[\mathrm{Spec} K, B^{\mathrm{et}}G] = \pi_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\mathrm{et}}G) \hookrightarrow H_0^{\mathbb{A}^1}(B^{\mathrm{et}}G).$$

1.5 Формы Пфистера

Рассмотрим фильтрацию на кольце Витта

$$W(K) \supset I \supset I^2 \supset I^3 \supset \dots$$

Теорема 1.5.1. $\bigcap_n I^n = \{0\}$.

Мы уже знаем, что $W(K)/I = \mathbb{Z}/2$. I/I^2 как абелева группа порождается элементами вида $\langle\langle a \rangle\rangle := x^2 - ay^2$ для некоторого $a \in K^\times$. Более общо, I^n/I^{n+1} порождается тензорными произведениями элементов

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle = \langle\langle a_1 \rangle\rangle \otimes \dots \otimes \langle\langle a_n \rangle\rangle.$$

$\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ называется n -кратной формой Пфистера.

Пример 1.5.2. При $n = 1$ имеем $a \in K^*/(K^*)^2$; $K(\sqrt{a})$ — квадратичное расширение.

При $n = 2$ символ $\langle\langle a, b \rangle\rangle$ есть норма алгебры кватернионов $H = (a, b)$ над K .

При $n = 3$ символ $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$ есть норма алгебры октонионов (a, b, c) над K (что соответствует группам типа G_2 над K).

Теорема 1.5.3 (Арасон). Если $[q] \in I^n$, то $\mathrm{rk} q \geq 2^n$. Если при этом $\mathrm{rk} q = 2^n$, то $q \simeq \alpha \cdot \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$, где $\alpha \in K^\times$. В частности, $\bigcap I^n = 0$.

- $e_0(q) := \mathrm{rk} q \pmod 2$.
- Если $e_0 = 0$, то $[q] \in I$. Определим $e_1(q) := [q] \in I/I^2$. Этому соответствует $\langle\langle a \rangle\rangle$, где a — дискриминант q (с точностью до знака?).
- Если $e_1 = 0$, то $e_2(q) := [q] \in I^2/I^3$. Форме q можно сопоставить $C_0^+(q)$, четную положительную часть алгебры Клиффорда, это будет центральная простая алгебра. Имеем $[C_0^+(q)] \in {}_2\mathrm{Br}(K)$. По теореме Меркурьева, это сумма

$$[(a_1, b_1)] [(a_2, b_2)] \cdots [(a_k, b_k)]$$

$$\langle\langle a_1, b_1 \rangle\rangle + \langle\langle a_2, b_2 \rangle\rangle + \cdots + \langle\langle a_k, b_k \rangle\rangle.$$

- Если $e_2(q) = 0$, то можно определить $e_3(q)$ — инвариант Арасона.

1.6 Торсоры

Пусть G — простая алгебраическая группа над K .

G -**торсором** называется многообразие X над K , такое что

- определено действие $G \times X \rightarrow X$;
- над алгебраическим замыканием \bar{K} имеется изоморфизм $X_{\bar{K}} \simeq G_{\bar{K}}$ (как многообразий с G -действием).

Раньше торсоры назывались «главными однородными пространствами» (principal homogeneous space).

Пример 1.6.1. Действие G сдвигами на себе дает **тривиальный G -торсор**.

По определению, $H^1(K; G)$ есть множество классов изоморфности G -торсоров с отмеченной точкой (тривиальный G -торсор).

Пример 1.6.2. Зафиксируем $a \in K$. Для каждой K -алгебры R положим $\mu_2(R) = \{x \in R \mid x^2 = 1\}$, $X(R) := \{y \in R \mid y^2 = a\}$. Получаем схемы μ_2 и X , причем μ_2 действует на X умножением: если $y^2 = a$, $x^2 = 1$, то $(xy)^2 = a$.

X — тривиальный G -торсор iff у него есть рациональная точка: $X(K) \neq \emptyset$.

Если G — абелева группа, то на торсорах имеется сложение. При этом $H^1(K, \mu_2) \simeq K^*/(K^*)^2$ как абелева группа. И вообще $H^1(K, \mu_n) \simeq K^*/(K^*)^n$.

1.7 Скрученные формы

Напомним, что $O_{2n} = \text{Aut}(q_{\text{split}})$, где $q_{\text{split}} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ — **расщепимая форма** (от переменных $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$).

$H^1(K, O_{2n})$ можно отождествить с множеством классов изометрии невырожденных квадратичных форм ранга $2n$. Действительно, пусть q — квадратичная форма. Мы утверждаем, что $\text{Iso}(q_{\text{split}}, q)$ есть искомый торсор: на нем действует O_{2n} . Здесь $\text{Iso}(\varphi, \psi)$ обозначает функтор изоморфизмов между квадратичными формами φ и ψ ; более точно, $\text{Iso}(\varphi, \psi)(R) = \{f: \varphi_R \rightarrow \psi_R \mid f \text{ — изоморфизм}\}$. Над алгебраически замкнутым полем q изоморфна q_{split} , и получается $\text{Iso}(q_{\text{split}}, q_{\text{split}}) = \text{Aut}(q_{\text{split}}) = O_{2n}$.

Пусть A — некоторая алгебраическая структура над полем K (например, квадратичное пространство, конечномерная ассоциативная алгебра, конечномерная неассоциативная алгебра). Тогда **скрученная форма** A' для A есть такая структура над K , что при переходе к алгебраическому замыканию $A'_{\bar{K}} \simeq A_{\bar{K}}$.

Теорема. $H^1(K, \text{Aut}(A))$ есть множество классов изоморфности скрученных форм A над K .

Изоморфизм такой:

$$A' \xrightarrow{\sim} \text{Iso}(A, A').$$

На $\text{Iso}(A, A')$ есть структура алгебраического многообразия.

Замечание. Пусть X — проективное многообразие над K . Теорема (Гротендик): *функтор* $U \mapsto \text{Aut}_U(X \times U)$ *представим в схемах*; то есть, существует схема R такая, что $\text{Aut}_U(X \times U)$ естественно изоморфно $\text{Hom}(U, R)$.

Контрпример: $\text{Aut}(\mathbb{A}^n)$ не конечномерно.

Пример: $A := M_n(K)$. $\text{Aut}(A) = \text{PGL}_n$.

$H^1(K, M_n(K))$ — это скрученные формы $M_n(K)$, то есть центральные простые алгебры размерности n^2 , взятые с точностью до изоморфизма.

$\text{Aut}(\mathbb{P}^{n-1}) = \text{PGL}_n = \text{GL}_n / \mathbb{G}_m$.

Автоморфизмы сохраняют ранг.

$H^1(K, \text{PGL}_n)$ есть множество скрученных форм \mathbb{P}^{n-1} над K = **многообразия Севери–Брауэра**.

$$A \mapsto \text{SB}(A) = \{\text{левые идеалы } I \leq A \mid \dim_K(I) = n\}$$

Пример при $n = 2$: кватернионы $A = (a, b)$.
 $\beta u + \gamma v + \delta uv$. Имеем векторное пространство u, v, uv . Условие $\{\text{норма} = 0\}$ задает проективное подмногообразие в \mathbb{P}^2 .
 $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$ — коника.

$$\begin{aligned} \mathrm{PGL}_2 &\simeq \mathrm{SO}_3, \\ \{\text{кватернионы}\} &\simeq \{\text{формы ранга 3 с трив. дискриминантом}\}. \end{aligned}$$

1.8 Точные последовательности алгебраических групп

Точность последовательности алгебраических групп над K

$$1 \rightarrow C \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$$

означает следующее:

1. C — алгебраическая подгруппа в H .
2. После расширения скаляров $H(\overline{K}) \rightarrow G(\overline{K})$ является сюръекцией над алгебраическим замыканием поля K .
3. $C = \ker(H \rightarrow G)$, $C(R) = \ker(H(R) \rightarrow G(R))$.

Пример 1.8.1. Следующая последовательность алгебраических групп точна в указанном смысле:

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1,$$

где $\mathbb{G}_m(K) := \{(x, y) \in K^2 \mid xy = 1\}$, и отображение $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$ есть $x \mapsto x^2$ (это сюръекция над алгебраическим замыканием).

Пример 1.8.2. Следующая последовательность точна:

$$\mu_2(K) \rightarrow K^\times \rightarrow K^\times \rightarrow H^1(K, \mu_2) \rightarrow H^1(K, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^1(K, \mathbb{G}_m).$$

(Отображение $K^\times \rightarrow K^\times$ есть $x \mapsto x^2$.)

Теорема 1.8.3 (Теорема Гильберта 90).

$$\begin{aligned} H^1(K, \mathbb{G}_m) &= \{\bullet\}, \\ H^1(K, \mathrm{GL}_n) &= \{\bullet\}. \end{aligned}$$

Из точности последовательности выше и теоремы 90 получается

$$H^1(K, \mu_2) \simeq K^\times / (K^\times)^2.$$

Пример 1.8.4. Точная последовательность

$$1 \rightarrow \mathrm{SL}_n \rightarrow \mathrm{GL}_n \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m \rightarrow 1.$$

приводит к последовательности

$$\mathrm{GL}_n(K) \xrightarrow{\det} \mathbb{G}_m(K) \rightarrow H^1(K, \mathrm{SL}_n) \rightarrow H^1(K, \mathrm{GL}_n).$$

Здесь $H^1(K, \mathrm{SL}_n) = \{\bullet\}$ и $H^1(K, \mathrm{GL}_n) = \{\bullet\}$.

Пример 1.8.5.

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathrm{SL}_n \rightarrow \mathrm{PGL}_n \rightarrow 1.$$

$$\mu_n(K) \rightarrow \mathrm{SL}_n(K) \rightarrow \mathrm{PGL}_n(K) \rightarrow K^\times / (K^\times)^2 \rightarrow \{\bullet\} \rightarrow H^1(K, \mathrm{PGL}_n).$$

$$1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathrm{PGL}_n \rightarrow 1.$$

Пример 1.8.6.

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_n &\rightarrow \mathrm{PGL}_n, \\ g &\mapsto (x \mapsto g x g^{-1}) \in \mathrm{Aut}(M_n). \end{aligned}$$

Это сюръекция алгебраических групп, но не сюръекция на точках.

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathrm{SL}_n \rightarrow \mathrm{PGL}_n \rightarrow 1.$$

Теорема 1.8.7. Если имеется точная последовательность $1 \rightarrow C \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$, то возникает точная последовательность множеств с отмеченной точкой

$$1 \rightarrow C(K) \rightarrow H(K) \rightarrow G(K) \rightarrow H^1(K, C) \rightarrow H^1(K, H) \rightarrow H^1(K, G).$$

См. книгу Серра «Когомологии Галуа».

1.9 Вторые когомологии

- Напомним, что $H^1(F, G)$ — множество G -торсоров. Если G коммутативна, то это аффинная алгебраическая группа.
(Как в этом случае умножаются торсоры? — Что-то типа $E_1 * E_2 = (E_1 \times E_2) / ((e_1, e_2) = (g e_1, g e_2))$.)
- $H^0(F, G)$ — это функтор $F \rightsquigarrow G(F)$, т.е. функтор точек. Если G коммутативна, то $H^i(F, G)$ можно определить как i -й производный функтор. При $i = 1$ это совпадает с первым определением.

Теорема 1.9.1. Пусть имеется точная последовательность $1 \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$. Предположим, что $C \leq \mathrm{Cent}(G)$. Тогда точная последовательность продолжается до вторых когомологий:

$$1 \rightarrow C(F) \rightarrow G(F) \rightarrow H(F) \rightarrow H^1(F, C) \rightarrow H^1(F, G) \rightarrow H^1(F, H) \rightarrow H^2(F, C).$$

Пример 1.9.2. $H^2(F, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(F)$ — группа Брауэра поля F : она состоит из классов эквивалентности $[A]$ центральных простых алгебр A над F ; умножение выглядит так: $[A] \cdot [B] = [A \otimes_F B]$.

Пусть X — квазипроективное многообразие. Тогда $H^2(X, \mathbb{G}_m)_{\mathrm{tors}} = \mathrm{Br}(X)$ (теорема Габбера (Gabber)). (Загадочное замечание: подразумевается топология fppf , а для этальной топологии в определении торсора вместо \bar{F} нужно взять F^{sep} .)

Пример 1.9.3 (Топологический аналог). Пусть X — хорошее топологическое пространство (например, область в \mathbb{R}^n , многообразие или CW-комплекс).

Пусть G — топологическая группа (например, S^1 , S^3 , $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$).

Имеется левое действие $G \times (G \times X) \rightarrow (G \times X)$, $g_1 \cdot (g_2, x) \mapsto (g_1 g_2, x)$.

Левое действие послойно и свободно на скрученной форме $G \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$.

Для всех $x \in X$ возникает действие $G \times \mathcal{G}(x) \rightarrow \mathcal{G}(x)$. Здесь $\mathcal{G}(x) \simeq G$, и этот изоморфизм зависит от x .

$(\mathcal{G}, G \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G})$ в топологии называется **главным G -расслоением (principal G -bundle)**.

$\mathcal{G}/G = X$.

Пример 1.9.4. $\mathbb{C}^\times = \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^1)$.

Пусть $L \rightarrow X$ — комплексное линейное расслоение, $z(X)$ — нулевое сечение.

Рассмотрим отображение $\mathbb{C}^\times \times (L - z(X)) \rightarrow (L - z(X))$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$. Имеем изоморфизм $L(x) - 0 \simeq \mathbb{C}^\times$, зависящий от x .

- Тогда $H^1(X, \mathbb{C}^\times)$ — классы изоморфизма \mathbb{C}^\times -торсоров над X . Они соответствуют линейным расслоениям над X : расслоению L соответствует описанный выше торсор $L - z(X)$, и по торсору \mathcal{G}^\times можно построить расслоение \mathcal{L} .
- Таким образом, мы видим, что $H^1(X, \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^1))$ — это скрученные формы расслоения $\mathbb{C} \times X$ над X .

- Аналогично, $H^1(X, \text{Aut}(\mathbb{C}^n))$ — это (1) скрученные формы расслоения $\mathbb{C}^n \times X$ над X , то есть (2) векторные расслоения над X со слоем \mathbb{C}^n (с точностью до изоморфизма).
- Пусть $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}, \sum u_i v_i)$ — автоморфизмы, сохраняющие квадратичную форму. Тогда

$$H^1(X, \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n}, \sum u_i v_i))$$

— это (1) скрученные формы расслоений вида $(\mathbb{C}^n \times X, \sum u_i, v_i) \rightarrow X$, то есть (2) векторные расслоения $E \rightarrow X$ со слоем \mathbb{C}^n и с квадратичной формой в слоях.

- Рассмотрим $\text{Aut}(M_n(\mathbb{C})) = \text{PGL}_n(\mathbb{C})$. Тогда $H^1(X, \text{Aut}(M_n(\mathbb{C})))$ — это скрученные формы расслоений вида $M_n(\mathbb{C}) \times X \rightarrow X$. Например, по каждому расслоению $E \rightarrow X$ можно построить расслоение $\text{End}(E) \rightarrow X$, и послойно $\text{End}(E)(x) = \text{End}(E(x))$. Но бывают и расслоения, не изоморфные никакому $\text{End}(E) \rightarrow X$ — это нетривиальные топологические алгебры Адзумаи.

Имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^\times \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{PGL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow 1.$$

Отсюда получается точная последовательность

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \Gamma(X, \mathbb{C}^\times) \rightarrow \Gamma(X, \text{GL}_n(\mathbb{C})) \rightarrow \Gamma(X, \text{PGL}_n(\mathbb{C})) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}^\times) \rightarrow H^1(X, \text{GL}_n(\mathbb{C})) \rightarrow H^1(X, \text{PGL}_n(\mathbb{C})) \rightarrow H^2(X, \mathbb{C}^\times). \end{aligned}$$

Топологическая группа Брауэра есть $\text{Br}_{\text{top}}(X) := H_{\text{top}}^2(X, \mathbb{C}^\times)$.

Пример 1.9.5. Мы утверждаем, что

$$H^2(X, S^1) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}}.$$

Заметим, что $\mathbb{C}^\times \simeq S^1 \times \mathbb{R}$. Имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow S^1 \rightarrow 0,$$

откуда получаем точную последовательность

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^2(X, S^1) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X, \mathbb{R}) = H^3(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}.$$

Обозначим отображение $H^3(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ через α . Тогда связывающий гомоморфизм дает нам отображение $H^2(X, S^1) \rightarrow \ker(\alpha) = H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}}$.

На самом деле,

$$\text{Br}_{\text{top}}(X) = H^3(X, \mathbb{Z})_{\text{tors}}.$$

Нечто такое написано как определение (у Серра? Гротендика?).

А какие нам известны нетривиальные скрученные формы алгебры $M_n(K)$? Так это и есть центральные простые алгебры.

Имеем точную последовательность $1 \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \text{GL}_n \rightarrow \text{PGL}_n \rightarrow 1$, откуда

$$H^1(F, \text{GL}_n) \rightarrow H^1(F, \text{PGL}_n) \rightarrow H^2(F, \mathbb{G}_m).$$

При этом $H^1(F, \text{GL}_n) = \{\bullet\}$, и $H^1(F, \text{PGL}_n)$ — центральные простые алгебры степени n . Это отображение дает изоморфизм

$$\begin{aligned} \text{Br}(F) &\simeq H^2(F, \mathbb{G}_m), \\ A &\mapsto [A]. \end{aligned}$$

Имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1,$$

где $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$ — отображение $x \mapsto x^n$.

Получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(F, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^2(F, \mu_n) & \longrightarrow & H^2(F, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^2(F, \mathbb{G}_m), \\ \parallel & & & & \parallel & & \parallel \\ \{\bullet\} & & & & \text{Br}(F) & \xrightarrow{\cdot n} & \text{Br}(F) \end{array}$$

откуда $H^2(F, \mu_n) = {}_n \text{Br}(F)$.

Еще один пример: пусть $\text{char } F \neq 2$. Имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \text{SO}_n \rightarrow \text{O}_n \xrightarrow{\det} \mu_2 \rightarrow 1.$$

Тогда

$$\text{O}_n(F) \twoheadrightarrow \mu_2(F) \rightarrow H^1(F, \text{SO}_n) \rightarrow H^1(F, \text{O}_n) \xrightarrow{\text{disc}} H^1(F, \mu_2) = F^*/(F^*)^2.$$

Отсюда $H^1(F, \text{SO}_n)$ (невыврожденные квадратичные формы дискриминанта 1) — подмножество в $H^1(F, \text{O}_n)$ (невыврожденные квадратичные формы ранга n с точностью до изометрии).

Это дает нам инвариант $\text{disc} = e_1: I \rightarrow I/I^2 \simeq F^*/(F^*)^2$.

Еще один пример:

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \text{Spin}_n \rightarrow \text{SO}_n \rightarrow 1.$$

$$\text{Spin}_n(F) \rightarrow \text{SO}_n(F) \xrightarrow{N} H^1(F, \mu_2) \xrightarrow{0} H^1(F, \text{Spin}_n) \rightarrow H^1(F, \text{SO}_n) \xrightarrow{e_2} H^2(F, \mu_2).$$

Здесь

- $H^2(F, \mu_2) = {}_2 \text{Br}(F)$.
- N — **спинорная норма**. А именно, каждый элемент SO_n раскладывается в произведение отражений $g = s_{v_1} \cdots s_{v_{2k}}$; тогда $N(g) := q(v_1) \cdots q(v_{2k}) \pmod{(F^\times)^2}$.
- Отображение $\text{Spin}_n(F) \rightarrow \text{SO}_n(F)$ уже не обязательно является сюръективным.
- Мы не знаем, что такое $H^1(F, \text{Spin}_n)$. Отображение $H^1(F, \mu_2) \rightarrow H^1(F, \text{Spin}_n)$ равно 0 по теореме Эйхлера.

Самая правая стрелка в этой длинной последовательности дает нам инвариант $e_2: I^2 \rightarrow I^2/I^3 = {}_2 \text{Br}(F)$. Его можно описать так: по форме q можно построить алгебру Клиффорда $C(q)$ с четной частью $C_0(q)$. Тогда e_2 сопоставляет форме $q \in I^2$ класс $[C_0^+(q)]$ в $\text{Br}(F)$.

Пусть E — левый G -торсор, G действует на X справа. Рассмотрим скрученную форму X

$${}_E X := (X \times E)/(x, e) \sim (x g^{-1}, g e).$$

На ней действует ${}_E G$. Действительно, $E_G = \text{Aut}_{G\text{-торс}}(E)$ — автоморфизмы E как G -торсора. ${}_E G$ является группой (тут G действует сопряжениями на себе).

Пример 1.9.6. Рассмотрим $H^1(F, \text{O}_n)$.

$E \in H^1(F, \text{O}_n)$ задается квадратичной формой q , и q должна быть формой расщепимой квадратичной формы q_0 . При этом $E = \text{Isom}(q_0, q)$.

$O(q_0)$ действует на квадрике $Q_0 := \{q_0 = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = 0\} \subseteq \mathbb{P}^{2n-1}$.

После подкрутки: ${}_E Q_0 = \{q = 0\}$ и на ${}_E Q_0$ действует группа $O(q) = {}_E O(q_0)$.

1.10 Многообразие Севери–Брауэра

Пример 1.10.1. Рассмотрим $H^1(F, \mathrm{PGL}_n)$.

Торсор $E \in h^1(F, \mathrm{PGL}_n)$ задается центральной простой алгеброй A степени n : $E = \mathrm{Isom}_{F\text{-}\mathcal{A}lg}(M_n, A)$. Напомним, что $\mathrm{PGL}_n = \mathrm{Aut}(M_n)$.

Каждому вектору $v \in \mathbb{A}^n - \{0\}$ соответствует правый идеал $\{x \mid \mathrm{im} x \leq \langle v \rangle\}$ в M_n . Множество всех идеалов, получающихся таким образом — это в точности множество правых идеалов размерности n .

${}_E\mathbb{P}^{n-1}$ — Множество правых идеалов размерности n в A — **многообразие Севери–Брауэра** $\mathrm{SB}(A)$.

Уравнения:

$$\mathrm{SB}(A) := \{W \subset A \mid W \cdot A \subseteq A\}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{SB}(A) \hookrightarrow \mathrm{Gr}(n, A) = \mathrm{Gr}(n, n^2).$$

$$\begin{array}{ccc} A \times \mathrm{SB}(A) & & A \times \mathrm{Gr}(n, n^2) \\ \uparrow \tau|_{\mathrm{SB}(A)} & & \uparrow \tau_n \\ \mathrm{SB}(A) & \hookrightarrow & \mathrm{Gr}(n, n^2) \end{array} \quad \begin{array}{c} W \\ \downarrow \\ \{w\} \end{array}$$

Лемма 1.10.2. $\mathrm{End}_{\mathrm{SB}(A)}(J_A) \simeq A$ (эндоморфизмы расслоения).

Поэтому два описания $H^1(F, \mathrm{PGL}_n)$ — как алгебры Адзумайи и как формы \mathbb{P}^{n-1} — эквивалентны.

Утверждение 1.10.3. Подрасслоение $\tau|_{\mathrm{SB}(A)}$ выдерживает правое A -действие на $A \times \mathrm{SB}(A)$.

$$J_A := \tau|_{\mathrm{SB}(A)}.$$

Пример 1.10.4. $\mathrm{Gr}(K, n)$ (линейные k -мерные подпространства в \mathbb{A}^n).

Если U — k -мерное подпространство в \mathbb{A}^n , то $\{x \mid \mathrm{im} x \subseteq U\}$ — правый идеал в M_n размерности kn .

$\mathrm{SB}_k(A)$ — обобщенное многообразие Севери–Брауэра — многообразие правых идеалов размерности k .

$\mathrm{Gr}(k, n) \simeq \mathrm{Gr}(n-k, n)$ (напомним, что это не канонический изоморфизм). Аналог этой двойственности: $\mathrm{SB}_k(A) \simeq \mathrm{SB}_{n-k}(A^{op})$.

Утверждение 1.10.5. $\mathrm{SB}(A)(F) \neq \emptyset \Rightarrow A \simeq M_n$.

$$\mathrm{SB}_k(A)(F) \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{ind} A \mid k.$$

(Напомним, что такое ind . Для центральной простой алгебры A имеем $A \simeq M_m(D)$, где D — тело. $m \cdot \deg D = n$. $\deg D =: \mathrm{ind} A$, где $\deg D := \sqrt{\dim D}$.)

Скрученные формы \mathbb{P}^{n-1} — это скрученные формы M_n . Имеем $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{n-1}) = \mathrm{PGL}_n$.

Предположим $\mathrm{char} F \neq 2$.

$$\mathrm{Aut}(q_0) = O(q_0).$$

$$\mathrm{Aut}(Q_0)^+ = \mathrm{PGO}(q_0), \text{ где } Q_0 \text{ — квадратика } \{q = 0\}.$$

$H^1(F, \mathrm{PGO}(q_0))$ — классы (A, σ) изоморфности центральных простых алгебр A с ортогональной инволюцией σ .

$$\{\text{правые идеалы } I \text{ в } (A, \sigma) \text{ размерности } \deg A \mid \sigma(I) \cdot I = 0\} =: X_{(A, \sigma)} \hookrightarrow \mathrm{SB}(A).$$

При поднятии до \overline{F} получаем:

$$Q_{\sigma(q_{\overline{F}})} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\overline{F}}^{\deg A - 1} = \mathrm{SB}(A) \otimes_F \overline{F}.$$

Вложение $X_{(A, \sigma)} \hookrightarrow \mathrm{SB}(A)$ есть аналог вложения квадратика в проективное пространство.

2 Проективные однородные многообразия

2.1 Первые примеры

Еще раз про аналогию с топологией:

$E \rightarrow X$ — торсор на топологическом пространстве X , G действует на E . Существует покрытие $\{U_i\}$ пространства X такое, что

$$\begin{array}{ccc} U_i \times G \simeq E|_{U_i} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \\ U_i & \hookrightarrow & X \end{array}$$

У нас: возьмем $X = \operatorname{Spec} K$. Пусть $E \rightarrow \operatorname{Spec} K$ — торсор. Существует расширение полей L/K такое, что торсор $E_L \rightarrow \operatorname{Spec} L$ изоморфен торсору $G_L \rightarrow \operatorname{Spec} L$.

Мы хотим описать $H^1(K, G)$. Стратегия: для торсора E и (гладкого проективного) G -многообразия X мы определили ${}_E X$ — ${}_E G$ -многообразие (снова гладкое проективное), которое называется *скрученной формой* X , то есть,

- $E_{\overline{K}} \simeq G_{\overline{K}}$ как $G_{\overline{K}}$ -многообразие,
- $({}_E G)_{\overline{K}} \simeq G_{\overline{K}}$ как алгебраическая группа,
- $({}_E X)_{\overline{K}} \simeq X_{\overline{K}}$ как $G_{\overline{K}}$ -многообразие.

Пример 2.1.1. Пусть $A \in H^1(K, \operatorname{PGL}_n)$; то есть, A — центральная простая алгебра степени n . Положим $E = \operatorname{Isom}(M_n, A)$, $X = \mathbb{P}^{n-1}$, $G = \operatorname{PGL}_n$. Тогда ${}_E G = \operatorname{Aut}(A)$, ${}_E X = \operatorname{SB}(A)$ — многообразие правых идеалов в A размерности n . Заметим, что $\operatorname{SB}(A)(K)$ непусто тогда и только тогда, когда $A \simeq M_n$. Вообще, свойства многообразия $\operatorname{SB}(A)$ отражают свойства исходного торсора.

Пример 2.1.2. Пусть $G = \operatorname{O}_n$, $q \in H_1(K, \operatorname{O}_n)$ — невырожденная квадратичная форма ранга n .

$E = \operatorname{Isom}(q_0, q)$, где q_0 расщепима (то есть, имеет вид $\langle 1, -1 \rangle \perp \dots \perp \langle 1, -1 \rangle$ плюс, возможно, слагаемое $\langle 1 \rangle$).

$X = \{q_0 = 0\}$ в проективном смысле. Тогда $Q = {}_E X = \{q = 0\}$. Заметим, что $Q(K)$ непусто тогда и только тогда, когда форма q изотропна, то есть, $q \simeq \langle 1, -1 \rangle \perp q'$. Этот факт остается верным при любом расширении L/K : $Q(L)$ непусто тогда и только тогда, когда форма q_L изотропна.

Факт 2.1.3. Пусть q имеет вид $\langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_k \rangle$. Тогда

Форма q_L изотропна тогда и только тогда, когда она расщепима (то есть,

$$\text{раскладывается в сумму форм вида } \langle 1, -1 \rangle). \quad (*)$$

Наоборот, если $\dim q$ четна и $(*)$ выполнено для любого расширения полей, то q пфистерова с точностью до скаляра. Если же $\dim q$ нечетна, то $q \perp \langle 1 \rangle$ пфистерова с точностью до скаляра.

Таким образом, от торсора E можно переходить к многообразию ${}_E X$ (и можно варьировать X), смотреть на его инварианты (в смысле алгебраической геометрии) и получать отсюда информацию об инвариантах торсора.

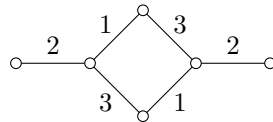
Пусть X — гладкое проективное многообразие. Мы ограничимся случаем, когда X *однородное*, то есть, $G(\overline{K})$ действует на $X(\overline{K})$ транзитивно (заметим, что это означает, что отображение $G \times X \rightarrow X \times X$, $(g, x) \mapsto (gx, x)$ сюръективно как пучок, а не в категорном смысле; категорное понятие эпиморфизма не подходит для наших целей: например, отображение $\operatorname{Spec} \mathbb{Q} \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ сюръективно в категории схем). Неформально говоря, у G на X одна орбита. Тогда X называется **проективным однородным многообразием**.

Как строить проективные однородные многообразия? Пусть G — расщепимая группа, V — неприводимое представление (в положительной характеристике нужно действовать осторожно). Рассмотрим $\mathbb{P}(V)$ — многообразие прямых в V , проходящих через 0. У группы G есть ровно одна замкнутая орбита на $\mathbb{P}(V)$ — это и есть наше X . На самом деле, все проективные однородные многообразия так получаются (но не обязательно единственным образом).

Пример 2.1.4. $G = \mathrm{SL}_n$ действует на $V = K^n$ (имеется в виду обычное, *векторное* представление). Пусть u, v — два вектора. Можно ли найти g такое, что $\langle gu \rangle = \langle v \rangle$ (здесь через $\langle x \rangle$ мы обозначаем прямую, натянутую на x)? Ответ — можно, если u и v отличны от 0. Значит, в K^n есть две орбиты действия группы G : $\{0\}$ и $\{v \mid v \neq 0\}$. После проективизации в $\mathbb{P}(K^n) = \mathbb{P}^{n-1}$ остается только одна орбита.

Пример 2.1.5. $G = \mathrm{SL}_n$ действует на $V = \Lambda^k(K^n)$, $k = 1, \dots, n-1$. На неразложимых поливекторных орбитах много, но на разложимых действие транзитивно. Свойство «быть разложимым» определяется уравнениями Плюккера. Орбита в $\mathbb{P}(\Lambda^k(K^n))$ — это $\mathrm{Gr}(k, n)$.

Пусть, к примеру, $n = 4$, $k = 2$. Диаграмма Хассе весов нашего представления выглядит так:



Разложимый тензор задается двумя векторами. Запишем их в базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) : $(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) \wedge (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4)$. Обозначим координату тензора x при бивекторе $e_i \wedge e_j$ через x_{ij} . Тогда разложимость x равносильно обращению в 0 выражения $x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}$. Это следует, например, из соотношения на миноры матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$.

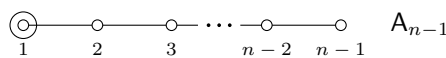
2.2 Параболические подгруппы

Оказывается, любое X , являющееся орбитой в $\mathbb{P}(V)$, задается квадратичными уравнениями в проективных координатах.

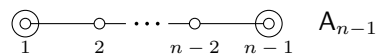
Пусть $v \in V$, $X = G \cdot \langle v \rangle$ — орбита вектора v . Тогда $\mathrm{Stab}_G(\langle v \rangle) = P$ — параболическая подгруппа в G . Проективное однородное многообразие задается подгруппой P с точностью до сопряженности.

Посмотрим, как тор T в G действует на вектор v . Из равенства $T\langle v \rangle = \langle v \rangle$ следует, что найдется $\lambda: T \rightarrow \mathbb{G}_m$ (**вес** неприводимого представления V) такое, что $tv = \lambda(t)v$ для всех $t \in T$. Представление задается своим старшим весом (точнее, орбитой веса относительно W , но в этой орбите есть единственный доминантный вес). Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ — простые корни. Рассмотрим базис $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_l^\vee$ в двойственном пространстве, где α_i^\vee определяется равенством $\alpha_i^\vee(\beta) = \frac{2(\alpha_i, \beta)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$. Пусть $\varpi_1, \dots, \varpi_l$ — двойственный к нему базис. Таким образом, $\frac{2(\alpha_i, \varpi_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} = \delta_{ij}$. Эти элементы $\varpi_1, \dots, \varpi_l$ называются **фундаментальными весами**. Вес λ раскладывается по этому базису следующим образом: $\lambda = \sum m_i \varpi_i$. После этого X (и P) зависит только от того, какие из m_i не равны 0. То есть, проективные однородные многообразия задаются подмножеством вершин на диаграмме Дынкина, состоящим из тех вершин, для которых $m_i \neq 0$. Мы будем их обводить на картинке.

Например, картинка для проективного пространства такая:



Это соответствует векторному представлению $V = V(\varpi_1)$ группы SL_n . Вообще, если на диаграмме A_{n-1} обвести вершину с номером k , получится $\mathrm{Gr}(k, n)$. Есть еще, например, присоединенное представление: SL_n действует на своей алгебре Ли $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n)$. Картинка для этого представления такая:



Первая вершина соответствует V , последняя — V^* , в итоге получаем $V^* \otimes V \simeq \mathrm{End}(V)$.

Если обведена одна вершина ($V = V(\varpi_i)$), то P называется **максимальной** параболической. Если все вершины обведены, то P называется **борелевской** (это минимальная среди параболических). Любая гладкая замкнутая подгруппа, содержащая B , называется **параболической** и получается таким образом: $B \leq P \leq G$.

Пусть теперь на диаграмме Дынкина системы A_{n-1} обведены вершины с номерами k_1, \dots, k_m . Полученное многообразие можно описать в терминах стандартного представления $V = K^n$ группы

SL_n . А именно,

$$X = \{U_1 \leq \dots \leq U_m \mid \dim U_i = k_i\}.$$

Такое X называется **многообразием флагов**. При этом SL_n действует на X транзитивно. Заметим, что тензорное произведение $V(\varpi_{k_1}) \otimes \dots \otimes V(\varpi_{k_m})$ уже не обязано быть неприводимым, но можно взять кусок, соответствующий весу $\varpi_{k_1} + \dots + \varpi_{k_m}$.

Так мы описали все однородные проективные многообразия для группы SL_n . В общем случае (для произвольной G) иногда однородное проективное многообразие называют **обобщенным флаговым многообразием**. Его можно описать так:

$$X = \{P' \leq G \mid P' \text{ сопряжена с } P\},$$

где значок $P' \leq G$ означает, что P' — гладкая замкнутая подгруппа в G . Более точно,

$$X(R) = \{P' \leq G_R \mid \text{существуют } S/R, g \in G(S) : gP'g^{-1} = P\}.$$

После подкрутки на торсор E получаем

$${}_E X = \{P' \leq {}_E G \mid P'_K \text{ сопряжена с } P_K \text{ внутри } ({}_E G)_K = G_K\}.$$

Обратите внимание, что в ${}_E G$ никакой P может не оказаться.

Проективное однородное многообразие X **изотропно**, если $X(K) \neq \emptyset$. Сама группа ${}_E G$ называется **изотропной**, если для какого-то проективного однородного многообразия ${}_E X$, отличного от точки, ${}_E X$ изотропно.

Пример 2.2.1. Пусть $G = \mathrm{PGL}_n$. Ее скрученная форма ${}_E G$ имеет вид $\mathrm{Aut}(A)$, а соответствующая скрученная форма проективного пространства — $\mathrm{SB}(A)$. Заметим, что у PGL_n (в отличие от SL_n) нет векторного представления. Почему? Для начала поймем, откуда берется скрученная форма SL_n . Отображение определителя $\det: \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathbb{G}_m$ скручивается в *приведенную норму* (*reduced norm*)

$$\mathrm{Nrd}: A^* = \mathrm{GL}_1(A) \rightarrow \mathbb{G}_m.$$

Ядро этого отображения обозначается через $\mathrm{SL}_1(A) = \{g \in A \mid \mathrm{Nrd}(g) = 1\}$. Например, $(\mathrm{Nrd}(x))^n = \det(y \mapsto xy)$.

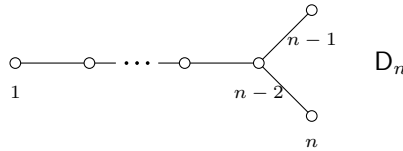
Решетка корней содержится в решетке весов:

$$\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_l \leq \mathbb{Z}\varpi \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\varpi_l$$

Диаграммы Дынкина классифицируют расщепимые полупростые группы с точностью до изогении, а класс изоморфности внутри класса изогении задается промежуточной решеткой между этими двумя (с точностью до внешних автоморфизмов). Минимальная решетка $\mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_l$ соответствует присоединенной группе (без центра); максимальная решетка $\mathbb{Z}\varpi_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\varpi_l$ соответствует односвязной группе (у нее самый большой центр).

2.3 SO_{2n}

Посмотрим на однородные многообразия для SO_{2n} . Диаграмма Дынкина выглядит так:



Весу ϖ_1 отвечает квадратика $\{q(v) = 0\}$, что соответствует естественному представлению V группы SO_{2n} . Весу ϖ_2 — представление $\Lambda^2 V$. Соответствующее многообразие — множество вполне изотропных плоскостей $\langle u, v \rangle$, то есть, таких, что $q|_{\langle u, v \rangle} = 0$. Это условие можно описать так: $q(u) = q(v) = f(u, v) = 0$, где f — поляризация формы q : $f(u, v) = q(u + v) - q(u) - q(v)$. Аналогично (с помощью вполне изотропных подпространств различной размерности) описываются случаи $\varpi_3, \dots, \varpi_{n-2}$.

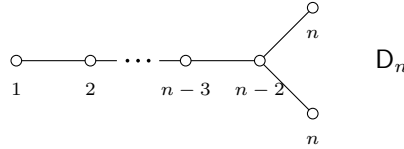
Весам ϖ_{n-1} и ϖ_n соответствуют вполне изотропные подпространства размерности n . Дело в том, что многообразие вполне изотропных подпространств размерности n имеет две компоненты связности. Для того, чтобы объяснить этот эффект, выберем базис $e_1, \dots, e_n, e_{-n}, \dots, e_{-1}$, относительно которого матрица Грама формы q имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оказывается, подпространства $\langle e_1, \dots, e_{n-1}, e_n \rangle$ и $\langle e_1, \dots, e_{n-1}, e_{-n} \rangle$ вполне изотропны, но не переводятся друг в друга действием SO_{2n} . Первое соответствует весу ϖ_{n-1} , а второе — весу ϖ_n . Куда же делось многообразие вполне изотропных подпространств размерности $n-1$? Оно не максимальное однородное (соответствует не максимальной параболической подгруппе), и соответствует весу $\varpi_{n-1} + \varpi_n$. Действительно,

$$\mathrm{Stab}(\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle) = \mathrm{Stab}(\langle e_1, \dots, e_{n-1}, e_n \rangle) \cap \mathrm{Stab}(\langle e_1, \dots, e_{n-1}, e_{-n} \rangle).$$

Вообще, не максимальные многообразия соответствуют флагам. Посмотрим на вес $\varpi_{i_1} + \dots + \varpi_{i_k}$. Флаг для него — это набор подпространств таких размерностей:



с правильной инцидентностью. А именно, для каждой из двух цепочек от первой вершины до двух последних инцидентность — это включение, а для весов ϖ_{n-1} и ϖ_n инцидентность означает, что пересечение соответствующих подпространств размерности n имеет размерность $n-1$.

Перед нами пример *геометрии*. Гораздо более простой пример — случай системы A_2 . Там всего два фундаментальных веса: ϖ_1 соответствует точкам (и параболическим подгруппам типа ϖ_1), а ϖ_2 — прямым (и параболическим подгруппам типа ϖ_2). Более подробно, посмотрим на трехмерное векторное пространство F^3 . Ненулевой вектор u порождает одномерное подпространство $\langle u \rangle \subseteq F^3$, и его стабилизатор $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_3}(\langle u \rangle)$ — это параболическая подгруппа типа ϖ_1 :

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \text{ — стабилизатор вектора } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для описания прямых можно воспользоваться двойственностью и перейти к пространству $(F^3)^*$. Ненулевой ковектор $\varphi \in (F^3)^*$ порождает одномерное подпространство $\langle \varphi \rangle \subseteq (F^3)^*$, и его стабилизатор $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_3}(\langle \varphi \rangle)$ — это параболическая подгруппа типа ϖ_2 :

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \text{ — стабилизатор ковектора } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отношение инцидентности между ними такое: точка лежит на прямой тогда и только тогда, когда $\varphi(u) = 0$. В терминах параболических подгрупп: $\mathrm{Stab}(\langle u \rangle) \cap \mathrm{Stab}(\langle \varphi \rangle)$ содержит борелевскую подгруппу (то есть, параболическую подгруппу типа $\varpi_1 + \varpi_2$).

Если мы теперь посмотрим на геометрию, заданную абстрактными аксиомами проективной плоскости (с аксиомой Дезарга, обеспечивающей ассоциативность, но без аксиомы Паппа, обеспечивающей коммутативность), мы получим группу $\mathrm{SL}_1(A)$, где A — центральная простая алгебра степени 3.

2.4 Вычисление колец Чжоу

Пусть $E \in H^1(F, G)$, и задано однородное проективное G -многообразие X . Рассмотрим скрученное многообразие ${}_E X$; нас интересуют инварианты этого многообразия в смысле алгебраической геометрии. Например, $\mathrm{CH}^*({}_E X)$.

Вложение поля F в его алгебраическое замыкание \bar{F} дает морфизм схем $\mathrm{Spec} \bar{F} \rightarrow \mathrm{Spec} F$. Пулбэком получается многообразие $X_{\bar{F}}$:

$$\begin{array}{ccc} X_{\bar{F}} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} \bar{F} & \longrightarrow & \mathrm{Spec} F \end{array}$$

Отсюда получаем гомоморфизм

$$\mathrm{CH}^*({}_E X) \rightarrow \mathrm{CH}^*({}_E X)_{\bar{F}} = \mathrm{CH}^*(X_{\bar{F}}).$$

Нас интересует образ этого гомоморфизма: кручение содержится в его ядре, за счет чего легче жить. Первый шаг — вычисление $\mathrm{CH}^*(X_{\bar{F}})$.

2.5 Пример: проективное пространство

Пример 2.5.1. Рассмотрим $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ с диагональным действием SL_{n+1} . Это действие не транзитивно: есть диагональ \mathbb{P}^n . Как выглядит дополнение к диагонали? Мы утверждаем, что оно расслаивается над $\mathrm{Gr}(1, 2; n+1)$ со слоем \mathbb{A}^1 . Здесь $\mathrm{Gr}(1, 2; n+1)$ — многообразие флагов, состоящих из прямой и плоскости, в $(n+1)$ -мерном пространстве.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n & \longleftarrow & \mathbb{P}^n \\ & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & \mathrm{Gr}(1, 2; n+1) & \end{array}$$

Это расслоение выглядит так: пара $(\langle u \rangle, \langle v \rangle) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ отправляется во флаг $\langle u \rangle \leq \langle u, v \rangle$. Прообраз флага при этом — это многообразие способов дополнить прямую до плоскости, то есть, $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^0 = \mathbb{A}^1$. Более строго, нужно говорить про расслоения на $\mathrm{Gr}(1, 2; n+1)$: есть двумерное векторное расслоение τ_2 , сопоставляющее флагу $\langle u \rangle \leq \langle u, v \rangle$ плоскость $\langle u, v \rangle$, и есть одномерное векторное расслоение τ_1 , сопоставляющее флагу $\langle u \rangle \leq \langle u, v \rangle$ прямую $\langle u \rangle$.

Теперь зафиксируем в этом описании u , то есть, возьмем слой всей картинке над точкой в первом сомножителе \mathbb{P}^n . Получим картинку

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \longleftarrow & \mathrm{pt} \\ & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & \mathrm{Gr}(1; n) & \end{array}$$

Заметим, что $\mathrm{Gr}(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}$. Поэтому можно написать точную последовательность локализации:

$$\mathrm{CH}^{*-n}(\mathrm{pt}) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow 0.$$

Средняя стрелка является гомоморфизмом колец, а первый член почти всегда равен нулю. Поэтому

$$\mathrm{CH}^i(\mathbb{P}^n) = \begin{cases} \mathrm{CH}^i(\mathbb{P}^{n-1}), & i < n, \\ \mathbb{Z}, & i = n, \\ 0, & i > n. \end{cases}$$

По индукции получаем, что у $\mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^n)$ в каждой размерности от 0 до n стоит одна копия \mathbb{Z} .

Пример 2.5.2. Опишем другой способ. Пусть $\dim(V) = n + 1$. Рассмотрим действие группы $\mathrm{SL}(V)$ (или $\mathrm{PGL}(V)$) на $\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V)$ (соответствующее весу $\varpi_1 + \varpi_n$). Там имеется подмногообразие $\{\varphi(u) = 0\}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V) & \xleftarrow{\quad} & \{\varphi(u) = 0\} \\ & \downarrow \mathbb{A}^n & \\ & \mathbb{P}(V^*) & \end{array}$$

Зафиксировав φ , получаем

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{P}^{n-1} \\ & \downarrow \mathbb{A}^n & \\ & \mathrm{pt} & \end{array}$$

Значит, имеется следующая точная последовательность локализации:

$$\mathrm{CH}^{*-1}(\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathrm{pt}) \rightarrow 0.$$

Вычисление по индукции приводит к тому же результату, что и в предыдущем примере.

Факт 2.5.3. Если $Z \subseteq X$ — замкнутое подмногообразие, и $U = X \setminus Z$, имеется точная последовательность локализации

$$\mathrm{CH}^{*-\mathrm{codim}_X Z} \rightarrow \mathrm{CH}^*(X) \rightarrow \mathrm{CH}^*(U) \rightarrow 0,$$

где первое отображение — push-forward, а второе — pull-back (и является гомоморфизмом колец).

Пример 2.5.4. Тот же результат можно получить и прямым вычислением: понять, что компонента кольца Чжоу коразмерности i порождается классом подпространства $[\mathbb{P}^{n-i}]$, причем $[\mathbb{P}^n] = 1$. Кроме этого,

$$[\mathbb{P}^{n-1}]^i = \begin{cases} [\mathbb{P}^{n-i}], & i \leq n, \\ 0, & i > n. \end{cases}$$

Например, выбрав на \mathbb{P}^n однородные координаты $[x_0 : \dots : x_n]$, можно взять $\mathbb{P}^{n-1} = \{x_0 = 0\}$, другое $\mathbb{P}^{n-1} = \{x_1 = 0\}$ и обнаружить, что их пересечение равно $\{x_0 = x_1 = 0\} = \mathbb{P}^{n-2}$.

Замечание 2.5.5. По сути, в примере 2.5.2 мы нарисовали фильтрацию

$$\mathbb{P}^n \xleftarrow{\mathbb{A}^n} \mathbb{P}^{n-1} \xleftarrow{\mathbb{A}^{n-1}} \dots \xleftarrow{\mathbb{A}^1} \mathrm{pt}$$

Вообще, если у многообразия X существует фильтрация замкнутыми подмногообразиями $S \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$ такая, что $X_i \setminus X_{i+1} = \coprod \mathbb{A}^{k_i}$, то X называется **клеточным**. В этом случае

- все CH^i — свободные конечно порожденные абелевы группы (их ранг равен количеству клеток в соответствующей разности);
- $\mathrm{CH}(X)_i \simeq \mathrm{CH}(X_L)_i$ для любого расширения L/F .

2.6 Пример: многообразие Севери–Брауэра

Перейдем теперь к $\mathrm{SB}(D)$, где D — тело, $\mathrm{ind} D = n + 1$. Это скрученная форма \mathbb{P}^n : $\mathrm{SB}(D) = {}_E \mathbb{P}^n$. В разделе 2.4 мы построили отображение

$$\mathrm{CH}^*(\mathrm{SB}(D)) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathbb{P}_{\overline{F}}^n).$$

Циклы из его образа называются **рациональными** (по отношению к скручивающему торсору E). В разделе 2.5 мы вычислили правую часть: там стоит копия \mathbb{Z} в каждой компоненте с номерами от 0 до n . Образующая компоненты коразмерности 0 всегда оказывается в образе.

Предположим, что класс $[\mathrm{pt}]$ оказался рационален. Это означает, что есть конечные (сепарабельные) расширения L_1, \dots, L_k такие, что

- над каждым L_i наше многообразие имеет рациональную точку;
- $\gcd_i([L_i : F]) = 1$.

Заметим, что первое условие равносильно тому, что $[D_{L_i}] = 0$ в $\text{Br}(L_i) = 0$. Применим отображение трансфера $\text{Br}(L_i) \rightarrow \text{Br}(F)$. Получим, что $[L_i : F] \cdot [D] = 0$ в $\text{Br}(F)$ для всех i . Из этого (а также из второго условия) следует, что $[D] = 0$ в $\text{Br}(F)$.

2.7 Пример: квадрака

Рассмотрим квадраку $Q = \{q = 0\}$. В $Q \times Q = \{(\langle u \rangle, \langle v \rangle)\}$ есть подмножество $\{f(u, v) = 0\}$, а в нем — диагональ $\{\langle u \rangle = \langle v \rangle\} \simeq Q$. Получаем фильтрацию

$$\begin{array}{ccccc} Q \times Q & \xleftarrow{\quad} & \{f(u, v) = 0\} & \xleftarrow{\quad} & Q. \\ & \downarrow \mathbb{A}^{\dim Q} & & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & Q & & \text{OGr}(1, 2; f) & \end{array}$$

Здесь $\text{OGr}(1, 2; f)$ означает многообразие флагов, состоящих из вполне изотропных подпространств вида $\langle u \rangle \leq \langle u, v \rangle$.

Расслоение $Q \times Q \setminus \{f(u, v) = 0\} \rightarrow Q$ устроено так: пара $(\langle u \rangle, \langle v \rangle)$ отправляется в $\langle u \rangle$. Проверим, что слой изоморфен $\mathbb{A}^{\dim Q}$. Пусть $u = e_1$. Тогда наше дополнение имеет вид $\{f(e_1, v) \neq 0\}$. Условие $f(e_1, v) \neq 0$ равносильно тому, что коэффициент у v при базисном векторе e_{-1} не равен 0. Поэтому можно читать, что он равен 1. Теперь все коэффициенты v , кроме тех, что стоят при e_1 и e_{-1} , можно брать какими угодно, а коэффициент при e_1 определяется однозначно из условия изотропности $q(v) = 0$. Иначе говоря, если τ — тавтологическое расслоение на Q , рассмотрим $(\tau^\perp)^*$. Его слой над точкой $\langle u \rangle \in Q$ равен $(\langle u \rangle^\perp)^*$. Вот нужный нам изоморфизм:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{\dim Q} &\rightarrow \mathbb{P}((\langle u \rangle^\perp)^*) \setminus \mathbb{P}(\{\varphi \in (\langle u \rangle^\perp)^* \mid \varphi(u) = 0\}), \\ v &\mapsto (\varphi: w \mapsto f(v, w)). \end{aligned}$$

Расслоение $\{f(u, v) = 0\} \setminus Q \rightarrow \text{OGr}(1, 2; f)$ устроено проще: его слой равен $\mathbb{P}(\tau_2) \setminus \mathbb{P}(\tau_1) \simeq \mathbb{A}^1$, как и в примере 2.5.1.

Теперь зафиксируем u ; получим фильтрацию

$$\begin{array}{ccccc} Q & \xleftarrow{\quad} & \{f(u, v) = 0\} & \xleftarrow{\quad} & \text{pt}, \\ & \downarrow \mathbb{A}^{\dim Q} & & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & \text{pt} & & Q' & \end{array}$$

где Q' — квадрака размерности $\dim Q - 2$. Получаем точные последовательности

$$\begin{aligned} \text{CH}^{*-1}(\{f(u, v) = 0\}) &\rightarrow \text{CH}^*(Q) \rightarrow \text{CH}^*(\text{pt}) \rightarrow 0, \\ \text{CH}^{*-\dim Q+1}(\text{pt}) &\rightarrow \text{CH}^*(\{f(u, v) = 0\}) \rightarrow \text{CH}^*(Q') \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теперь при помощи индукции можно доказать следующее.

Пусть $\dim Q = n$ чётно. Тогда $\text{CH}^i(Q)$ — свободная абелева группа ранга 1 для всех $i = 0, \dots, n$, кроме $i = n/2$; $\text{CH}^{n/2}(Q) \simeq \mathbb{Z}^2$. Обозначим за $h = [Q''] \in \text{CH}^1(Q)$ класс подквадрики коразмерности 1. Это гиперплоское сечение Q в общем положении. Тогда 1 — образующая $\text{CH}^0(Q)$, h — образующая $\text{CH}^1(Q)$, h^2 — образующая $\text{CH}^2(Q)$, \dots . С другой стороны, pt — образующая $\text{CH}^n(Q)$, $[\mathbb{P}^1]$ — образующая $\text{CH}^{n-1}(Q)$, $[\mathbb{P}^2]$ — образующая $\text{CH}^{n-2}(Q)$, \dots . Это классы изотропных подпространств соответствующих размерностей. Наконец, $h^{n/2}$ является суммой двух образующих; в качестве одной из них можно взять $[\mathbb{P}^{n/2}]$.

Это можно увидеть в координатной записи: Q задается уравнением $x_1 y_1 + \dots + x_{n/2+1} y_{n/2+1} = 0$. После этого Q'' задается уравнением $x_{n/2+1} - y_{n/2+1} = 0$ (это гиперплоское сечение, как и было обещано), а следующие образующие задаются последовательным наложением уравнений $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, и так далее. Когда дойдем до коразмерности $n/2$, получим два варианта: либо

$$x_1 = \dots = x_{n/2+1} = 0,$$

либо

$$x_1 = \dots = x_{n/2} = y_{n/2+1} = 0.$$

Пример 2.7.1. Пусть $n = 4$, то есть, мы имеем дело с D_3 . Перед нами четырехмерная квадрака. Ее уравнение выглядит так: $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$. Уравнения двух образующих в коразмерности $4/2 = 2$ выглядят так:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = x_3 = 0, \\ x_1 &= x_2 = y_3 = 0. \end{aligned}$$

Их пересечение имеет вид $x_1 = x_2 = x_3y_3 = 0$, что равносильно $x_1 = x_2 = 0$. Почему-то это условие равносильно $x_3 = y_3 = 0$.

2.8 Нерасщепимая квадрака

Что произойдет, если взять нерасщепимую квадраку? Возьмем торсор $E \in H^1(F, O_{2n+2})$ и построим ${}_E Q$. Как вычислить $\mathrm{CH}^*({}_E Q)$? Более простой вопрос: рассмотрим отображение

$$\mathrm{CH}^*({}_E Q) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{CH}^*(({}_E Q)_{\overline{F}}).$$

Что можно сказать про образ этого отображения (то есть, про рациональные циклы)? Продолжим считать для простоты, что n четно. Мы знаем, что стоит в правой части: образующие $1, h, h^2, \dots$ в коразмерностях $0, 1, 2, \dots$, до середины, образующие $[\mathrm{pt}], [\mathbb{P}^1], [\mathbb{P}^2], \dots$ в коразмерностях $n, n-1, n-2, \dots$ до середины, и две образующие $[\Pi_1], [\Pi_2]$ в коразмерности $n/2$. При этом $h^{n/2} = [\Pi_1] + [\Pi_2]$. Умножение выглядит так: $h \cdot [\mathbb{P}^i] = [\mathbb{P}^{i-1}]$, $h \cdot [\Pi_1] = h \cdot [\Pi_2] = [\mathbb{P}^{n/2}]$.

Во всяком случае, h рационален: можно взять любую гладкую подквадрику коразмерности 1. Пусть ${}_E Q$ задается уравнением $q = 0$. В случае расщепимой [четномерной] квадрики это было уравнение $x_1y_1 + \dots + x_{n/2+1}y_{n/2+1} = 0$, и подквадрика выделялась дополнительным условием $x_{n/2+1} - y_{n/2+1} = 0$. В общем случае можно взять любой v такой, что $q(v) \neq 0$, и $q|_{\langle v \rangle^\perp}$ задает гладкую подквадрику коразмерности 1.

Теорема 2.8.1 (Springer). *Предположим, что q анизотропна, то есть, $q(v) \neq 0$ при $v \neq 0$. Тогда класс $[\mathrm{pt}]$ не рационален.*

Теорема доказывается так: класс $[\mathrm{pt}]$ рационален тогда и только тогда, когда найдутся расширения E_i/F такие, что $\mathrm{gcd}([E_i : F]) = 1$, и над каждым E_i квадрака q_{E_i} изотропна. В частности, среди степеней расширений должна быть хотя бы одна нечетная, и потому для некоторого E/F с нечетным $[E : F]$ квадрака q_E изотропна. Но из этого следует, что q изотропна (это, собственно, и есть классическая теорема Спрингера).

Вот ответ на вопрос про образ: если Q анизотропна, то

$$\mathrm{im}(\mathrm{CH}^k({}_E Q) \rightarrow \mathrm{CH}^k(({}_E Q)_{\overline{F}})) = \begin{cases} \mathrm{CH}^k(({}_E Q)_{\overline{F}}), & k < n/2, \\ 2 \cdot \mathrm{CH}^k(({}_E Q)_{\overline{F}}), & k > n/2, \\ 2 \cdot \mathbb{Z}[\Pi_1] + \mathbb{Z}([\Pi_1] - [\Pi_2]), & k = n/2 \end{cases}$$

Если q изотропна, то есть существует ненулевой вектор v такой, что $q(v) = 0$, то можно выделить гиперболическую плоскость: $q = \langle 1, -1 \rangle \perp q'$. Проитерлируем этот процесс: получим

$$q = k \cdot \langle 1, -1 \rangle \perp q_{\mathrm{an}},$$

где q_{an} и k определены однозначно (q_{an} — с точностью до изометрии). При этом k называется **индексом Витта** формы q , а q_{an} — ее **анизотропной частью**.

Так вот, если индекс Витта нашей формы q равен k , то циклы $[\mathrm{pt}], [\mathbb{P}^1], \dots, [\mathbb{P}^{k-1}]$ рациональны. Обратное тоже верно: если эти циклы рациональны, то индекс Витта не меньше k .

Резюме: рациональные циклы на самой квадраке контролируют только ее индекс Витта.

Посмотрим теперь на другое многообразие, связанное с торсором $E \in H^1(F, O_{2n+2})$ (мы для удобства изменим нумерацию). А именно, рассмотрим $\mathrm{OGr}(2, Q)$ — многообразие вполне изотропных

плоскостей. Мы реализовали Q как $\{\langle v \rangle \mid q(v) = 0\}$. Тогда $\text{OGr}(2, Q) = \{\langle u, v \rangle \mid q(u) = q(v) = f(u, v) = 0\}$.

Чтобы добраться до этого многообразия, положим $X = \{f(u, v) = 0\}$ и рассмотрим фильтрацию из раздела 2.7:

$$\begin{array}{ccccc} Q \times Q & \xleftarrow{\quad} & \{f(u, v) = 0\} & \xleftarrow{\quad} & \text{pt}, \\ & \downarrow \mathbb{A}^n & & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & Q & & \text{OGr}(1, 2; Q). & \end{array}$$

С одной стороны, $\text{OGr}(1, 2; Q)$ — расслоение над $\text{OGr}(2; Q)$ со слоем \mathbb{P}^1 . С другой стороны, написанная фильтрация позволяет нам написать разложение

$$\text{CH}^*(Q \times Q) = \text{CH}^{*-n}(Q) \oplus \text{CH}^{*-n+1}(\text{OGr}(1, 2; Q)) \oplus \text{CH}^*(Q).$$

Более того, морфизмы в левую часть из слагаемых в правой части задаются явным образом (с помощью пулбэков и пушфорвардов), и они $O(q)$ -эквивариантны.

3 Мотивы Чжоу

3.1 Категория соответствий

До сих пор мы смотрели на CH^* и на морфизмы вида $\text{CH}^*(X) \rightarrow \text{CH}^*(\bar{X})$. Посмотрим теперь на **мотив Чжоу** многообразия X .

Начнем с категории гладких проективных многообразий над F . Что в ней плохо? Например, то, что морфизмы нельзя складывать: она не аддитивна (и тем более не абелева). Каждому морфизму $f: X \rightarrow Y$ можно сопоставить его график $\Gamma_f \subseteq X \times Y$ и получить $[\Gamma_f] \in \text{CH}^*(X \times Y)$. Элементы $\text{CH}^*(X \times Y)$ уже можно складывать! Поэтому в качестве промежуточного шага можно рассмотреть **категорию соответствий** Cor_F . Ее объекты — гладкие проективные многообразия над F . Морфизмы: $\text{Mor}(X, Y) = \text{CH}^{\dim Y}(X \times Y)$. Роль тождественного морфизма играет класс диагонали.

Замечание 3.1.1. В этой конструкции можно заменить CH на что-то другое, где есть пулбэки и пушфорварды (они понадобятся нам ниже), например, на другую теорию когомологий. Если взять K -теорию — получим K -мотивы, а не мотивы Чжоу.

Как определить композицию таких морфизмов? Пусть $\alpha \in \text{CH}^{\dim Y}(X \times Y)$, $\beta \in \text{CH}^{\dim Z}(Y \times Z)$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & X \times Y \times Z & & \\ & \swarrow \text{pr}_{XY} & \downarrow \text{pr}_{XZ} & \searrow \text{pr}_{YZ} & \\ X \times Y & & X \times Z & & Y \times Z \end{array}$$

Из нее получается следующая диаграмма на уровне Чжоу:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{CH}^*(X \times Y \times Z) & & \\ & \swarrow \text{pr}_{XY}^* & \downarrow (\text{pr}_{XZ})_* & \nwarrow \text{pr}_{YZ}^* & \\ \text{CH}^{\dim Y}(X \times Y) & & \text{CH}^*(X \times Z) & & \text{CH}^{\dim Z}(Y \times Z) \end{array}$$

Поэтому $\text{pr}_{XY}^*(\alpha) \cdot \text{pr}_{YZ}^*(\beta) \in \text{CH}^{\dim Y + \dim Z}(X \times Y \times Z)$, и мы можем определить

$$\beta \circ \alpha = (\text{pr}_{XZ})_*(\text{pr}_{XY}^*(\alpha) \cdot \text{pr}_{YZ}^*(\beta))$$

Это произведение имеет характер свертки. Например, можно взять в качестве X, Y, Z метрические пространства, а в качестве морфизмов — ядерные операторы, и получится свертка. Или в качестве X, Y, Z — конечные множества, а в качестве морфизмов — матрицы, и тогда получится произведение матриц.

3.2 Карубизация

Итак, в категории соответствий Cor_F морфизмы уже можно складывать: это аддитивная категория. Заметим, что в ней есть и прямые суммы ($X \oplus Y = X \amalg Y$), и произведения ($X \otimes Y = X \times Y$). Но эта категория не абелева (и даже не псевдоабелева). Напомним, что категория называется **псевдоабелевой**, если у любого проектора есть образ (в категорном смысле). То есть, если $p: X \rightarrow X$ — морфизм, для которого $p^2 = p$, то $X = X_1 \oplus X_2$, причем p — проекция на X_1 .

Есть стандартная процедура, как из аддитивной категории получить псевдоабелеву: **полноление по Каруби (карубизация)**. Таким образом по Cor_F строится **категория мотивов Гротендика–Чжоу \mathcal{M}** . Ее объекты — пары (X, p) , где $p: X \rightarrow X$ — идемпотент. Неформально говоря, эта пара символизирует «образ» морфизма p (которого может не быть в исходной категории). Морфизмы определяются так:

$$\text{Mor}((X, p), (Y, q)) = q \circ \text{Mor}(X, Y) \circ p.$$

Есть функтор $\text{Cor} \rightarrow \mathcal{M}$, $X \mapsto (X, \text{id}_X)$. Для многообразия X объект $M(X) = (X, \text{id}_X)$ называется **мотивом X** . На самом деле, нужно писать $\text{Cor}_{\text{rat, eff}}$ вместо Cor , и Chow^{eff} вместо \mathcal{M} . Мы получили функторы

$$\begin{array}{ccccc} \text{SmProj}/F & \longrightarrow & \text{Cor}_{\text{rat, eff}}(F) & \longrightarrow & \text{Chow}^{\text{eff}}(F), \\ & & \searrow M & & \nearrow \end{array}$$

где M — функтор «взятия мотива». При этом $M(X \amalg Y) = M(X) \oplus M(Y)$, $M(X \times Y) = M(X) \otimes M(Y)$.

3.3 Мотив проективной прямой

Попробуем «посчитать» мотив проективной прямой $M(\mathbb{P}^1)$. Напомним, что у $\text{CH}(\mathbb{P}^1)$ стоит \mathbb{Z} в коразмерностях 0 (с образующей 1) и 1 (с образующей $[\text{pt}]$). Рассмотрим вложение $i: \text{pt} \rightarrow \mathbb{P}^1$ и проекцию $\pi: \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{pt}$. Композиция $\pi \circ i: \text{pt} \rightarrow \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{pt}$ тождественна, поэтому $p = i \circ \pi$ является проектором на \mathbb{P}^1 . Это идемпотент, отправляющий все в точку. Поэтому в категории мотивов $M(\mathbb{P}^1) = M(\text{pt}) \oplus (\mathbb{P}^1, 1 - [p])$. Слагаемое $(\mathbb{P}^1, 1 - [p])$ обозначается через \mathbb{L} и называется **мотивом Лефшеца**. Это аналог аффинной прямой в категории мотивов. Оказывается, мотив Лефшеца неразложим.

Мотив точки часто обозначается через $\mathbb{Z} = M(\text{pt})$; он играет роль нейтрального объекта относительно \otimes . При этом мотив Лефшеца \mathbb{L} обозначается через $\mathbb{Z}(1)[2] = \mathbb{Z}\{1\}$. Тензорные степени мотива Лефшеца обозначаются так: $L^{\otimes k} = \mathbb{Z}(k)[2k] = \mathbb{Z}\{k\}$. Это в некотором смысле «мотив» k -мерного аффинного пространства.

3.4 Представимость функтора Чжоу

Часто удается разложить мотив многообразия X в прямую сумму вида $M(X) = \bigoplus M(Y_i) \otimes \mathbb{L}^{\otimes k_i}$, где Y_i — какие-то другие многообразия. Поэтому удобно обозначение $M(Y) \otimes \mathbb{L}^{\otimes k} = M(Y)(k)[2k] = M(Y)\{k\}$.

Что дает такого рода разложение?

Факт 3.4.1. Пусть $M(X) = \bigoplus M(Y_i) \otimes \mathbb{L}^{\otimes k_i}$. Тогда $\text{CH}^n(X) = \bigoplus \text{CH}^{n-k_i}(Y_i)$.

Например, из разложения $M(\mathbb{P}^1) = M(\text{pt}) \otimes M(\text{pt})\{1\}$ следует, что

$$\begin{aligned} \text{CH}^0(\mathbb{P}^1) &= \text{CH}^0(\text{pt}) = \mathbb{Z}, \\ \text{CH}^1(\mathbb{P}^1) &= \text{CH}^1(\text{pt}) \oplus \text{CH}^0(\text{pt}) = \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Вообще, $\text{CH}^n(X) = \text{Mor}(X, \mathbb{L}^{\otimes n})$ и $\text{CH}_n(X) = \text{Mor}(\mathbb{L}^{\otimes n}, X)$, то есть, CH — представимый функтор в категории мотивов, а \mathbb{L} играет роль пространства Эйленберга–Маклейна.

Умножение в CH^* тоже происходит из категории мотивов. Пусть $\alpha \in \mathrm{CH}^k(X)$, $\beta \in \mathrm{CH}^n(X)$, то есть $\alpha: M(X) \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes k}$, $\beta: M(X) \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes n}$. Перемножая эти отображения, получаем

$$\alpha \otimes \beta: M(X) \otimes M(X) \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes k} \otimes \mathbb{L}^{\otimes n}.$$

Правая часть изоморфна $\mathbb{L}^{\otimes(k+n)}$. Взяв композицию с морфизмом $M(\Delta): M(X) \rightarrow M(X \times X)$, получаем $\alpha \cup \beta: M(X) \rightarrow \mathbb{L}^{\otimes(k+n)}$.

3.5 Теорема Карпенко

Теорема 3.5.1 (Карпенко, 2000). Пусть дана фильтрация многообразия X замкнутыми (не обязательно гладкими) подмножествами

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_0 & \longleftarrow & X_1 & \longleftarrow & X_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & X_n & \longleftarrow & X_{n+1} = \emptyset. \\ & & \downarrow \mathbb{A}^{k_0} & & \downarrow \mathbb{A}^{k_1} & & & & & & \downarrow \mathbb{A}^{k_n} \\ & & Y_0 & & Y_1 & & \dots & & & & Y_n \end{array}$$

Вертикальные стрелки означают, что для каждого $i = 0, \dots, n$ задан плоский морфизм $X_i \setminus X_{i+1} \rightarrow Y_i$, слои которого — аффинные пространства \mathbb{A}^{k_i} .

Тогда $M(X) = \bigoplus M(Y_i)\{k_i\}$ и, кроме того, $M(X) = \bigoplus M(Y_i)\{\dim X - \dim Y_i - k_i\}$. В частности, имеется функториальный (по Z) изоморфизм $\mathrm{CH}^*(X \times Z) \simeq \bigoplus \mathrm{CH}^{*-k_i}(Y_i \times Z)$.

Фильтрация из теоремы 3.5.1 называется **относительным клеточным разложением**.

Пример 3.5.2. Фильтрация

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \longleftarrow & \mathrm{pt} \\ & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & \mathrm{pt} & \end{array}$$

приводит к разложению $M(\mathrm{pt}) \oplus M(\mathrm{pt})\{1\}$.

Пример 3.5.3. Фильтрация

$$\begin{array}{ccccc} Q \times Q & \longleftarrow & \{f(u, v) = 0\} & \longleftarrow & Q \\ & \downarrow \mathbb{A}^{\dim Q} & & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & Q & & \mathrm{OGr}(1, 2; f) & \end{array}$$

из раздела 2.7 приводит к разложению

$$M(Q \times Q) = M(Q) \oplus M(\mathrm{OGr}(1, 2; Q))\{1\} \oplus M(Q)\{\dim Q\}.$$

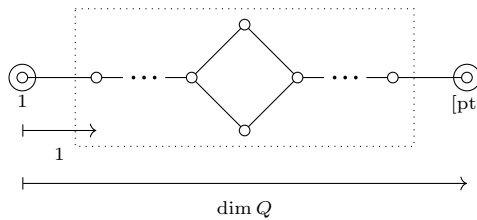
Пример 3.5.4. Пусть на квадрике Q есть рациональная точка (то есть, форма q изотропна). Тогда $q = \langle 1, -1 \rangle \perp q'$, и есть фильтрация

$$\begin{array}{ccccc} Q & \longleftarrow & X' & \longleftarrow & \mathrm{pt}, \\ & \downarrow \mathbb{A}^{\dim Q} & & \downarrow \mathbb{A}^1 & \\ & \mathrm{pt} & & Q' & \end{array}$$

где $Q' = \{q' = 0\}$. Получаем разложение

$$M(Q) = M(\mathrm{pt}) \oplus M(Q')\{1\} \oplus M(\mathrm{pt})\{\dim Q\}.$$

На картинке это выглядит так:

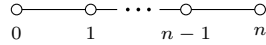


Обратите внимание, что на картинке выделен мотив подквадрики Q' , который сдвигается на 1. Кроме того, мотив точки (справа) сдвигается на $\dim Q$. Иными словами, у нас появились проекторы $1 \times [\text{pt}]$, $[\text{pt}] \times 1$, $\Delta_Q - 1 \times [\text{pt}] - [\text{pt}] \times 1$.

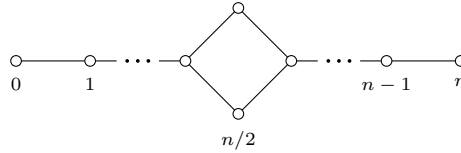
Замечание 3.5.5. Обозначение $\mathbb{Z}(1)[2]$ для мотива Лефшеца может показаться странным. Здесь второй сдвиг соответствует сдвигу в триангулированной категории Воеводского. При желании можно представлять это как композицию двух сдвигов: $(1)[1]$ — сдвиг на \mathbb{G}_m , $(0)[1]$ — сдвиг на S^1 .

Замечание 3.5.6. В общем случае, разложение Брюа показывает, что если G — расцепимая группа, P — ее параболическая подгруппа, то мотив однородного многообразия G/P равен прямой сумме сдвигов \mathbb{Z} : $M(G/P) = \bigoplus \mathbb{Z}\{i\}$. При этом $\mathbb{Z}\{i\}$ встречается столько раз, каково количество минимальных представителей классов смежности из W/W_P длины i . Поэтому сдвиги считаются из диаграммы Хассе.

Пример 3.5.7. Например, для \mathbb{P}^n диаграмма Хассе выглядит так:



Поэтому мотив \mathbb{P}^n равен $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{1\} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\{n\}$. Для [расцепимой] квадрики Q четной размерности диаграмма такая:



Поэтому $M(Q) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{1\} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\{n/2\}^{\otimes 2} \oplus \mathbb{Z}\{n/2+1\} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\{n\}$.

3.6 Метод общей точки

Пока что мы получали мотивные разложения только с помощью фильтраций и теоремы Карпенко. Сейчас мы узнаем еще один прием — *метод общей точки*. Пусть X, Y — многообразия, причем Y неприводимо. Рассмотрим $X_{F(Y)}$ и его кольцо Чжоу $\text{CH}^*(X_{F(Y)})$ (напомним, что $F(Y)$ — поле рациональных функций на Y).

Лемма 3.6.1. *Отображение $\text{CH}^*(X \times Y) \rightarrow \text{CH}^*(X_{F(Y)})$, полученное из декартова квадрата*

$$\begin{array}{ccc} X_{F(Y)} & \longrightarrow & X \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } F(Y) & \hookrightarrow & Y, \end{array}$$

сюръективно.

Доказательство. Указанную диаграмму можно представлять себе как индуктивный предел диаграмм вида

$$\begin{array}{ccc} X \times U & \longrightarrow & X \times Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & Y, \end{array}$$

где U — открытое непустое в Y (поскольку $\text{Spec } F(Y) = \varinjlim U$). Но каждое полученное таким образом отображение $\text{CH}^*(X \times Y) \rightarrow \text{CH}^*(X \times U)$ сюръективно в силу точной последовательности локализации. \square

Как этим пользоваться? Чтобы выделить прямое слагаемое в мотиве X , нам нужно найти проектор $p \in \text{CH}^{\dim X}(X \times X)$. Для этого есть два варианта:

1. взять $Y := X$, выбрать какой-то элемент из $\text{CH}^i(X_{F(X)})$ и поднять его в $\text{CH}^i(X \times X)$;

2. взять какой-нибудь Y , построить элементы из $\mathrm{CH}^i(X \times Y)$, $\mathrm{CH}^i(Y \times X)$, взять их композицию, и дальше как в первом пункте.

Пусть X — гладкое проективное над F . Напомним, что цикл $\alpha \in \mathrm{CH}^*(X_{\overline{F}})$ называется рациональным, если он лежит в образе отображения

$$\mathrm{res}: \mathrm{CH}^*(X) \rightarrow \mathrm{CH}^*(X_{\overline{F}}).$$

Аналогично, можно рассмотреть отображение

$$\mathrm{res}: \mathrm{CH}^*(X \times X) \rightarrow \mathrm{CH}^*(X_{\overline{F}} \times X_{\overline{F}}).$$

Правая часть гораздо лучше левой.

Предположим, что мы нашли цикл $p \in \mathrm{CH}^*(X_{\overline{F}} \times X_{\overline{F}})$ такой, что

1. p — проектор (в смысле композиции, определенной в разделе 3.1);
2. p рационален, то есть, p поднимается до какого-то $\tilde{p} \in \mathrm{CH}^*(X \times X)$.

Следует ли из этого, что \tilde{p} является проектором? Вообще говоря — нет, но для однородных многообразий есть такая теорема.

Теорема 3.6.2 (Теорема нильпотентности Роста). *Если X — проективное однородное многообразие, p — рациональный проектор на $X_{\overline{F}}$, то он поднимается до проектора \tilde{p} на X . Более сильное утверждение:*

$$\ker(\mathrm{CH}^*(X \times X) \rightarrow \mathrm{CH}^*(X_{\overline{F}} \times X_{\overline{F}}))$$

состоит из нильпотентных (в смысле композиции) элементов.

Как выглядят очевидные элементы $\mathrm{CH}^*(X \times X)$? Можно взять $\alpha \in \mathrm{CH}^*(X)$, $b \in \mathrm{CH}^*(X)$, и получить $a \times b \in \mathrm{CH}^*(X \times X)$.

Упражнение 3.6.3. В этом случае $(a \times b) \circ (c \times d) = \deg(ad)(c \times b)$, где $\deg: \mathrm{CH}^*(Y) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\mathrm{pt})$ происходит из морфизма $Y \rightarrow \mathrm{pt}$.

Упражнение 3.6.4. Пусть R — коммутативное кольцо, $I \trianglelefteq R$ — идеал, состоящий из нильпотентных элементов. Тогда любой идемпотент в R/I поднимается до идемпотента в R .

Определение 3.6.5. Многообразие X называется **клеточным**, если существует фильтрация вида

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_0 & \hookleftarrow & X_1 & \hookleftarrow & X_2 & \hookleftarrow & \dots \hookleftarrow X_n \hookleftarrow X_{n+1} = \emptyset, \\ & & \downarrow \mathbb{A}^{k_0} & & \downarrow \mathbb{A}^{k_1} & & \downarrow \mathbb{A}^{k_n} \\ & & \mathrm{pt} & & \mathrm{pt} & & \mathrm{pt} \end{array}$$

в которой все базы — точки.

Пример 3.6.6. Разложение Брюа говорит, что если группа G расщепима, P — параболическая подгруппа в G , то многообразие G/P клеточное.

Из теоремы Карпенко 3.5.1 следует, что для клеточного многообразия $M(X) = \bigoplus \mathbb{Z}\{r_i\}$.

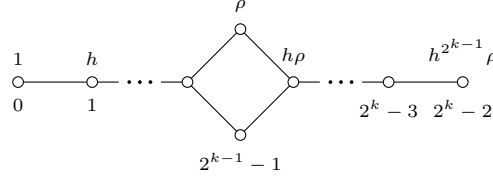
Определение 3.6.7. Многообразие X называется **клеточным над общей точкой** (generically cellular), если $X_{F(X)}$ клеточное.

Пример 3.6.8. Пусть Q — **Квадрика Пфистера**, то есть, $Q = \{q = 0\}$, где $q = \langle a_1, \dots, a_k \rangle = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_k \rangle$ — k -кратная форма Пфистера (размерность Q равна $2^k - 2$). Тогда Q клеточная над общей точкой.

Верно и обратное: все анизотропные четномерные квадрики, клеточные над общей точкой, так выглядят.

3.7 Мотив квадрики Пфистера

Пусть Q — квадратика Пфистера размерности $2^k - 2$. Мы знаем, что $Q_{F(Q)}$ — клеточное многообразие. Обозначим образующие компонент $\mathrm{CH}^*(Q_{F(Q)})$:



Возьмем $\rho \in \mathrm{CH}^*(Q_{F(Q)})$ и поднимем его до какого-то элемента $\alpha \in \mathrm{CH}^*(Q \times Q)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \alpha \in \mathrm{CH}^*(Q \times Q) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*(Q_{F(Q)}) \ni \rho \\ \downarrow \text{res} & & \downarrow \simeq \\ \bar{\alpha} \in \mathrm{CH}^*(Q_{\bar{F}} \times Q_{\bar{F}}) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^*(Q_{\bar{F}(Q)}) \ni \bar{\rho} \end{array}$$

Мы не умеем следить за α , но знаем, что $\bar{\alpha} = \text{res}(\alpha)$ переходит в $\bar{\rho}$ (который отождествляется с ρ при помощи изоморфизма), и знаем, как выглядит нижняя горизонтальная стрелка.

Итак, $\bar{\alpha}$ является прообразом ρ , поэтому обязан иметь вид

$$\bar{\alpha} = \bar{\rho} \times 1 + c_1 \cdot h^{2^{k-1}-2} \times h + c_2 \cdot h^{2^{k-1}-3} \times h^2 + \cdots + c_{2^{k-1}-1} \cdot 1 \times h^{2^{k-1}-1} + c \cdot 1 \times \bar{\rho}.$$

Заметим, что все слагаемые в правой части, кроме первого и последнего, содержатся в образе res , поскольку h рационален. Поэтому (подправив α) можно считать, что $\bar{\alpha} = \bar{\rho} \times 1 + c \cdot 1 \times \bar{\rho}$.

Кроме того, цикл $2\bar{\rho}$ рационален, поскольку квадратика Q ращепляется квадратичным расщеплением. Действительно, если $q = \langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle$, достаточно взять поле $F(\sqrt{a_1})$. Над этим полем q изотропна, а потому гиперболична. Рассуждение заканчивается рассмотрением диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^*(Q) & \xleftrightarrow{\quad} & \mathrm{CH}^*(Q_{F(\sqrt{a_1})}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{CH}^*(Q_{\bar{F}}) & \xleftrightarrow{\quad} & \mathrm{CH}^*(Q_{\bar{F}(\sqrt{a_1})}). \end{array}$$

Стало быть, либо $\bar{\rho} \times 1$ рационален, либо $\bar{\rho} \times 1 + 1 \times \bar{\rho}$ рационален (в зависимости от четности c).

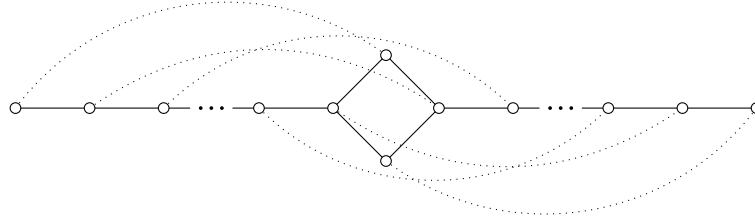
Предположим для начала, что $\bar{\rho} \times 1$ рационален. Докажем, что в этом случае Q изотропна. Действительно, циклы $\bar{\rho} \times 1$ и $1 \times \bar{\rho}$ рациональны, а потому и $(\bar{\rho} \times 1) \cdot (1 \times \bar{\rho}) = \bar{\rho} \times \bar{\rho}$ рационален. Кроме того, $\bar{h} \times 1$ и $1 \times \bar{h}$ рациональны, а потому и $\overline{\text{pt}} \times \overline{\text{pt}}$ рационален. Рассмотрим пушфорвард относительно проекции $Q \times Q$ на первый сомножитель:

$$\mathrm{CH}^*(\bar{Q} \times \bar{Q}) \rightarrow \mathrm{CH}^*(\bar{Q}), \overline{\text{pt}} \times \overline{\text{pt}} \mapsto \overline{\text{pt}}.$$

Поэтому и цикл $\overline{\text{pt}}$ рационален. Значит, на Q есть 0-цикл степени 1. По теореме Спрингера из этого следует, что на Q есть рациональная точка, то есть, Q изотропна — и это неинтересный случай.

Значит, на самом деле цикл $\bar{\rho} \times 1 + 1 \times \bar{\rho}$ рационален. Из него можно постараться изготовить проектор. Заметим, что для любых i, j цикл $(\bar{h}^i \bar{\rho}) \times \bar{j}^j + \bar{h}^i \times (\bar{h}^j \bar{\rho})$ тоже рационален. Как подобрать i, j , чтобы это был проектор? Заметим, что $\bar{\rho}$ лежит в коразмерности $2^{k-1} - 1$, поэтому нужно, чтобы $j = 2^{k-1} - 1 - i$. Оказывается, этого достаточно: нужно вспомнить формулу $(a \times b)(c \times d) = \deg(ad)c \times b$ и равенство $\bar{h}^{2^{k-1}-1} \bar{\rho} = \overline{\text{pt}}$. После этого прямое вычисление показывает, что мы получили проектор. Варьируя i , получаем $2^{k-1} - 1$ проекторов.

Соответствующее разложение мотива Q можно нарисовать так:



Иными словами, над базой слагаемые в разложении мотива квадрики объединяются в пары.

Упражнение 3.7.1. Пусть R — коммутативное кольцо, $I \trianglelefteq R$ — идеал, состоящий из нильпотентных элементов. Тогда любой обратимый элемент R/I поднимается до обратимого элемента в R .

Слагаемое, которое дает первый проектор из этих, называется **мотивом Роста** и обозначается через R . Таким образом, над замыканием $\bar{R} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{2^{k-1} - 1\}$. Мотив квадрики Пфистера, таким образом, составлен из сдвигов мотива Роста:

$$M(Q) = R \oplus R\{1\} \oplus \dots \oplus R\{2^{k-1} - 1\}.$$

Факт 3.7.2. Пусть $\langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle, \langle\langle a'_1, \dots, a'_k \rangle\rangle$ — две k -формы Пфистера. Соответствующие этим квадрикам мотивы Роста изоморфны (в категории мотивов) тогда и только тогда, когда сами формы изоморфны, что в свою очередь равносильно равенству чашечных произведений $(a_1) \cup \dots \cup (a_k) = (a'_1) \cup \dots \cup (a'_k)$ в $H^k(F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Замечание 3.7.3. Мотив Роста над замыканием превращается в $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\{2^{k-1} - 1\}$. Верно и обратное: если мотив над замыканием выглядит так, то это мотив Роста (теорема Никиты Семенова).

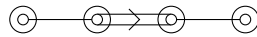
3.8 Пример: F_4

Над замкнутым полем группа типа F_4 — это автоморфизмы эрмитовых матриц 3×3 над октонионами: $F_4 = \text{Aut}(H_3(\mathbb{O}))$.

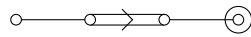
В общем случае приведем сначала «конструкцию по модулю 2». Вместо \mathbb{O} нужно взять другие октонионы (они заданы формой Пфистера $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$), и диагональную эрмитову форму вида $\langle 1, -d, -e \rangle$. Здесь $a, b, c, d, e \in F^*/(F^*)^2$. Если у поля F нет расширений нечетной степени, то любая группа типа F_4 так выглядит.

Например, над \mathbb{R} есть три группы типа F_4 :

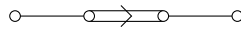
1. построенная по расщепимым октонионам (и тогда неважно, каковы d, e);



2. построенная по компактным октонионам (**октавам**) и $d = e = 1$;



3. построенная по октавам и $d = e = -1$ — она анизотропна (над \mathbb{R} это равносильно компактности).



По общей теории скрученных форм над любым полем группа типа F_4 — это группа автоморфизмов алгебры J , где J — скрученная форма йордановой алгебры $H_3(\mathbb{O})$.

Приведем теперь «конструкцию по модулю 3». Пусть D — центральная простая алгебра степени 3. Они все циклические, поэтому $D = (a, b)_3 = \langle x, y \mid x^3 = a, y^3 = b, xy = \zeta yx \rangle$ для некоторых

$a, b \in F^*/(F^*)^3$. Здесь $\zeta^3 = 1$. Возьмем еще $c \in F^*/(F^*)^2$. тогда на $D \oplus D \oplus D$ можно завести структуру йордановой алгебры $J(a, b, c)$ (с помощью скаляра c). Ее норма выглядит так:

$$N(\alpha \oplus \beta \oplus \gamma) = \text{Nrd}(\alpha) + c \text{Nrd}(\beta) + c^{-1} \text{Nrd}(\gamma) - \text{Trd}(\alpha\beta\gamma),$$

где Trd — приведенный след. Автоморфизмы этой нормы образуют группу типа E_6 , а подгруппа в ней, сохраняющая единицу (то есть, $1 \oplus 0 \oplus 0$) — это группа типа F_4 .

Гипотеза 3.8.1 (Ослабленный вариант гипотезы Серра–Роста). *Полученная группа типа F_4 зависит только от $\{a, b, c\} \in K_3^M(F)/3$ (или, что то же самое, от $(a) \cup (b) \cup (c) \in H^3(F, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$).*

Известно, что если $J(a, b, c) = J(a', b', c')$, то $\{a, b, c\} = \{a', b', c'\}$.

Если у поля нет квадратичных расширений, то любая скрученная форма $H_3(\mathbb{O})$ имеет вид $J(a, b, c)$.

Для любого поля F определен инвариант

$$g_3: H^1(F, F_4) \rightarrow H^3(F, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}).$$

- Если у F нет квадратичных расширений, то образ g_3 — это в точности чистые символы $(a) \cup (b) \cup (c)$.
- В этом случае ядро тривиально.
- Гипотеза состоит в том, что g_3 инъективно.

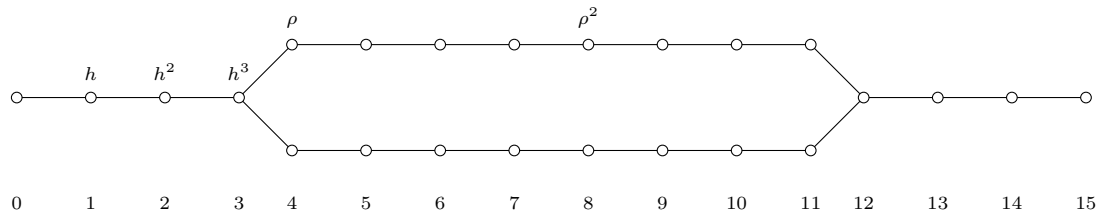
Мы построили алгебру $J(a, b, c)$ и группу $G = \text{Aut}(J(a, b, c))$.

Факт 3.8.2. Группа G или расцепима, или анизотопна (как и в случае группы изометрий пфистеровых форм).

В частности, если X — G -однородное проективное многообразие, то оно является клеточным над общей точкой, то есть, $X_{F(X)}$ клеточное. Пусть X — скрученная форма F_4/P_4 .

Отступление: Ж.-П. Vonnnet показал, что $M(\xi(G_2/P_1)) \simeq M(\xi(G_2/P_2))$. Многообразия G_2/P_1 и G_2/P_2 оба имеют размерность 5. На самом деле, G_2/P_1 — квадрика. Более того, это максимальный сосед квадрики Пфистера, и поэтому ее мотив раскладывается на мотивы Роста. Напомним, что $G_2 = \text{Aut}(\mathbb{O})$, где \mathbb{O} задается формой $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$. Возникающий мотив Роста отвечает как раз квадрике $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$. Вопрос: что если взять F_4/P_1 и F_4/P_4 ? У них тоже одинаковая размерность и многочлен Пуанкаре. Теорема Зайнуллина–Николенко–Семенова гласит, что $M(\xi(F_4/P_1)) \simeq M(\xi(F_4/P_2))$, если рассматриваемая группа типа F_4 имеет вид $\text{Aut}(J(a, b, c))$.

Размерность F_4/P_4 равна 15. Нарисуем диаграмму Хассе для этого многообразия. С точностью до каких-то ребер внутри она выглядит так:



1. Берем образующую в $\text{CH}^1(F_4/P_4)$. Она рациональная, то есть, лежит в образе отображения

$$\text{CH}^1(\xi(F_4/P_4)) \xrightarrow{\text{res}} \text{CH}^1(F_4/P_4).$$

В F_4 решетка весов совпадает с решеткой корней. В частности, ϖ_4 — корень.

2. Тогда h^2, h^3 — образующие CH^2 и CH^3 .
3. Далее, h^4 и ρ — базис для CH^4 .
4. Кроме того, $\rho^2 h^7 = [\text{pt}] \pmod{3}$.

5. $X_{F(X)}$ клеточное.

6. Если $\text{Aut}(J(a, b, c))$ расщепляется над расширением степени, взаимно простой с 3, то она и была расщепимой (это теорема типа Спрингера).

Начинаем применять метод общей точки:

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}^*(X \times X) & \longrightarrow & \text{CH}^*(X_{F(X)}) \\ \downarrow \text{res} & & \downarrow \simeq \\ \text{CH}^*(X_{\overline{F}} \times X_{\overline{F}}) & \longrightarrow & \text{CH}^*(X_{\overline{F}(X)}). \end{array}$$

Элемент $\bar{\rho} \in \text{CH}^*(X_{\overline{F}(X)})$ поднимается до элемента в $\text{CH}^*(X \times X)$. Поэтому в $\text{CH}^*(X_{\overline{F}} \times X_{\overline{F}})$ есть рациональный элемент вида

$$\alpha = \rho \times 1 + ? \cdot h^3 \times h + ? \cdot h^2 \times h^2 + ? \cdot h \times h^3 + ? \cdot 1 \times h^4 + c \cdot 1 \times \rho.$$

Подправив α на рациональные элементы (степени h), можно добиться, что останется только $\rho \times 1 + c \cdot 1 \times \rho$. Поскольку X над кубическим расширением становится клеточным, можно считать, что $c = 0$ или $c = \pm 1$. Почему $c \neq 0$? Если $\rho \times 1$ рационален, то и $1 \times \rho$ рационален, откуда $\rho^2 \times \rho^2$ и $h^7 \rho^2 \times h^7 \rho^2$ рационален, а потому и $\text{pt} \times \text{pt}$ рационален. Применяя пушфорвард, видим, что класс $\text{pt} \in \text{CH}^*(X)$ рационален — противоречие.

Поэтому на самом деле класс $\rho \times 1 \pm 1 \times \rho$ рационален. Значит, $\rho^2 \times 1 \pm 2\rho \times \rho + 1 \times \rho^2$ рационален, а потому и $\beta = \rho^2 + 1 \mp \rho \times \rho + 1 \times \rho^2$ рационален. Будем умножать полученный цикл на $h^i \times h^j$, где $i + j = 7$. Получится цикл

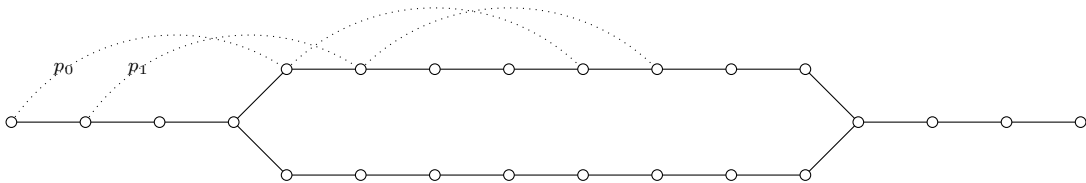
$$h^i \rho^2 \times h^j \mp h^i \rho \times h^j \rho + h^i \times h^j \rho^2 \in \text{CH}^{15}(X_{\overline{F}} \times X_{\overline{F}}).$$

Возьмем его композицию с самим собой, и воспользуемся сравнением. $h^{i+j} \rho^2 \equiv \text{pt} \pmod{3}$. Вообще, будем считать все по модулю 3:

$$h^i \rho^2 \times h^j + h^i \rho \times h^j \rho + h^i \times h^j \rho^2$$

Значит, этот цикл уже является проектором по модулю 3. Над замыканием каждое его слагаемое, конечно, является проектором — но не рациональным.

Итак, мы получили восемь ортогональных проекторов p_0, \dots, p_7 . Правые части этих проекторов (24 штуки) образуют базис в группе Чжоу, но не тот, который у нас был раньше (клетки Шуберта).



Можно также рассмотреть $\beta(h^i \times h^j)$ для произвольных i, j . Такие рациональные циклы индуцируют изоморфизмы между $(X, p_0)\{i\}$ и (X, p_i) .

Мы посчитали все по модулю 3, но можно добиться и целочисленных проекторов. На самом деле, при каких-то разумных условиях всегда можно поднять проекторы (и изоморфизмы) по модулю 2 и 3 до целочисленных.

Мотив Роста квадрики Пфистера $\langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle$ обозначается так: $R_{2,k}(\{a_1, \dots, a_k\})$. Полученный выше мотив (X, p_0) будем обозначать через $R_{3,3}(\{a, b, c\})$.

Следствие 3.8.3.

$$M(X) = \bigoplus_{i=0}^7 R_{3,3}(\{a, b, c\})\{i\}.$$

Замечание 3.8.4. Точно так же доказывается, что

$$M(\xi(F_4/P_1)) = \bigoplus_{i=0}^7 R_{3,3}(\{a, b, c\})\{i\}.$$

Более того, мотив любого G -однородного проективного многообразия Y раскладывается в сумму сдвигов мотива $R_{3,3}(\{a, b, c\})$. Для квадрики Пфистера верно аналогичное замечание.

Теорема 3.8.5 (Зайнуллин–Петров–Семенов). *Пусть G — полупростая алгебраическая группа над F , X — G -однородное проективное многообразие, клеточное над общей точкой, p — простое число. Тогда мотив $M(X) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ изоморфен сумме $R_p(G)$ с какими-то сдвигами, где $R_p(G)$ не зависит от X и неразложим по модулю p .*

Нужно пояснить, что такое $M(X) \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: в конструкции категории соответствий нужно взять $\text{Mor}(X, Y) = \text{CH}^{\dim Y}(X \times Y)/p$.

Замечание 3.8.6. Условие клеточности $X_{F(X)}$ можно заменить на требование расщепимости $G_{F(X)}$.

Замечание 3.8.7. Мотив $R_p(G)$ над алгебраическим замыканием раскладывается в сумму мотивов вида $\mathbb{Z}/p = M(\text{pt}) \otimes \mathbb{Z}/p$ со сдвигами, и для этих сдвигов есть некоторая формула.

Замечание 3.8.8. Все ситуации, описанные в теореме, перечислены в работе Петрова–Семенова.

Замечание 3.8.9. Сами проекторы можно поднять в \mathbb{Z} , но не изоморфизмы между ними.

Замечание 3.8.10. Если G не содержит сомножителей типа A и $p \neq 2, 3, 5$, то $R_p(G) = \mathbb{Z}/p$. Случай $p = 5$ возникает только для E_8 .

Замечание 3.8.11. Мотив $M(X) \otimes \mathbb{Q}$ раскладывается в прямую сумму мотивов $M(\text{pt}) \otimes \mathbb{Q}$ со сдвигами.

Замечание 3.8.12. Если $G = E_8$, $p = 2$, и инвариант Роста тривиален, то все G -однородные проективные многообразия X подходят. В этом случае $R_2(G)$ — мотив Роста, отвечающий 5-символу (см. работу Никиты Семенова про конечные подгруппы E_8).